

曲面設計のための Scattered data 補間における微係数推定法*

6C-2

○満園憲治†

黒田 満†

豊田工業大学

1. はじめに

形状設計において、仕様や計測上の制約から必ずしも格子状に与えることができない点群 (scattered data 以下 SD) を滑らかに補間する方法について述べる。まず xy 面上の点群からドロネー (Delaunay) 三角形分割して曲面を三角形網被覆する。次に各頂点における補間曲面の微係数を推定して、 C^1 連続な三角パッチ網を決定する。結果は特殊な部分を除いて四角パッチ網に変換できるけれども、本研究では扱わない。

2変数の SD 補間は、おもに実験結果、気象や地学等の測定値、有限要素法に基づく計算結果といった数百から数十万のデータを滑らかに補間ないしは近似する方法として研究されてきた。そして、80年代に大きな進展があり、いくつかの論文¹⁾にサーベイされている。特に優れた3つの(大域性のある)補間法^{2, 3, 4)}が知られている。

本研究ではこれ等のうち Minimum norm network (MNN) 法⁴⁾の式を整理・解析してその意味を明らかにする。補間に必要な微係数が実質的に近傍点の情報から決められていることを示すとともに初期値を改めて、形状設計に利用できる局所および大域的な補間法を導く。必要な滑らかさを維持しながら部分的な修正もできる比較的計算量の少ない方法である。そして得られる曲面の性質をこれまで比較によく使われてきた実験データに基づいて評価する。

2. 補間法

xy 面上のドロネー網を前提とし次の記法を使う。

- xy 面上データ点: $V_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, N$,
- 三角形 T_{ijk} : 頂点が V_i, V_j, V_k ,
- I_i : 三角形分割を決める3インデックスのリスト,
- $f_x(i, j, k)$, $f_y(i, j, k)$: 3D 三角形面の偏微係数,
- e_{ij} : V_j から V_i への辺,
- $M_i = \{(i, j, k) : T_{ijk} \text{ が } V_i \text{ まわりの三角形}\}$,
- $N_i = \{(i, j) : e_{ij} \text{ が } V_i \text{ を端とする辺である}\}$.

*Estimation Scheme of Differential Coefficients in Scattered Data Interpolation for Surface Design
Kenji MITSUZONO† and Mitsuru KURODA†
†Toyota Technological Institute
2-12-1 Hisakata, Tempaku, Nagoya 468, Japan

2.1 補間式

頂点インデックスが I である三角形 T 上の曲面パッチは次式で表される。これらのパッチは相互に C^1 連続であることが保証されている⁴⁾。

$$S_T(x, y) = \sum_{(i,j,k) \in I} S(V_i) [b_i^2(3-2b_i) + 6wb_i(b_k\alpha_{ij} + b_j\alpha_{ik}) + S'_k(V_i) [b_i^2 b_k + wb_i(3b_k\alpha_{ij} + b_j - b_k) + S'_j(V_i) [b_i^2 b_j + wb_i(3b_j\alpha_{ik} + b_k - b_j)], \quad (1)$$

$$S'_j(V_i) = x_{ji} S_{x_i} + y_{ji} S_{y_i}, \quad (2)$$

$$w = \frac{b_i b_j b_k}{b_i b_j + b_i b_k + b_j b_k}, \quad (3)$$

$$\alpha_{ij} = \frac{|e_{jk}|^2 + |e_{ik}|^2 - |e_{ij}|^2}{2|e_{ik}|^2}, \quad (4)$$

$$x_{ji} = x_j - x_i, \quad y_{ji} = y_j - y_i.$$

b_i, b_j, b_k は面積座標である。この三角パッチでは cross 微分が境界上で線形に変化する。複雑になるが境界にそって2次以上で変化するように改良して滑らかさを増すこともできる⁵⁾。ここでは省略する。

2.2 微係数の推定

同じ C^1 連続であっても頂点での偏微係数 $\{S_{x_i}, S_{y_i}\}$ を適切に選ぶことによって一層滑らかな曲面を得ることができる。そこで曲面設計の立場から MNN 法を解析・整理しなおした。MNN 法は各頂点で成り立つ次式を連立して解くものである。このとき、3次の補間スプラインの滑らかさの基である「最小性」と類似の最小性が成り立つ。

$$\left\{ \begin{aligned} S_{x_i} &= \frac{-1}{2 \sum_{(i,j,k) \in M_i} w_{ijk}} \left\{ \frac{S_{x_j} x_{ji} y_{ki}}{\det[e_{ji}, e_{ki}]} + \frac{S_{x_k} x_{ki} y_{ji}}{\det[e_{ki}, e_{ji}]} \right. \\ &\quad \left. + \frac{S_{y_j} y_{ji} y_{ki}}{\det[e_{ji}, e_{ki}]} + \frac{S_{y_k} y_{ki} y_{ji}}{\det[e_{ki}, e_{ji}]} - 3f_x(i, j, k) \right\} w_{ijk}, \end{aligned} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{aligned} S_{y_i} &= \frac{-1}{2 \sum_{(i,j,k) \in M_i} w_{ijk}} \left\{ \frac{S_{x_j} x_{ji} y_{ki}}{\det[e_{ji}, e_{ki}]} + \frac{S_{x_k} x_{ki} y_{ji}}{\det[e_{ki}, e_{ji}]} \right. \\ &\quad \left. + \frac{S_{y_j} y_{ji} y_{ki}}{\det[e_{ji}, e_{ki}]} + \frac{S_{y_k} y_{ki} y_{ji}}{\det[e_{ki}, e_{ji}]} - 3f_y(i, j, k) \right\} w_{ijk}, \end{aligned} \right.$$

$$w_{ijk} = \frac{\det[e_{ji}, e_{ki}]^2}{|e_{ji}|^3 |e_{ki}|^3}, \quad (6)$$

上式は偏微係数が V_i を含む各三角パッチによって受ける影響をわかりやすく示したものである。右辺を与えて左辺を得ることを繰り返して解く⁴⁾とき、初期値は Nielson と違って次式を使うべきである。

$$\left\{ \begin{aligned} S_{x_j} &= \frac{1}{2} \{f_x(i, j, k) + f_x(i, j, l)\}, \\ S_{y_j} &= \frac{1}{2} \{f_y(i, j, k) + f_y(i, j, l)\}. \end{aligned} \right. \quad (7)$$

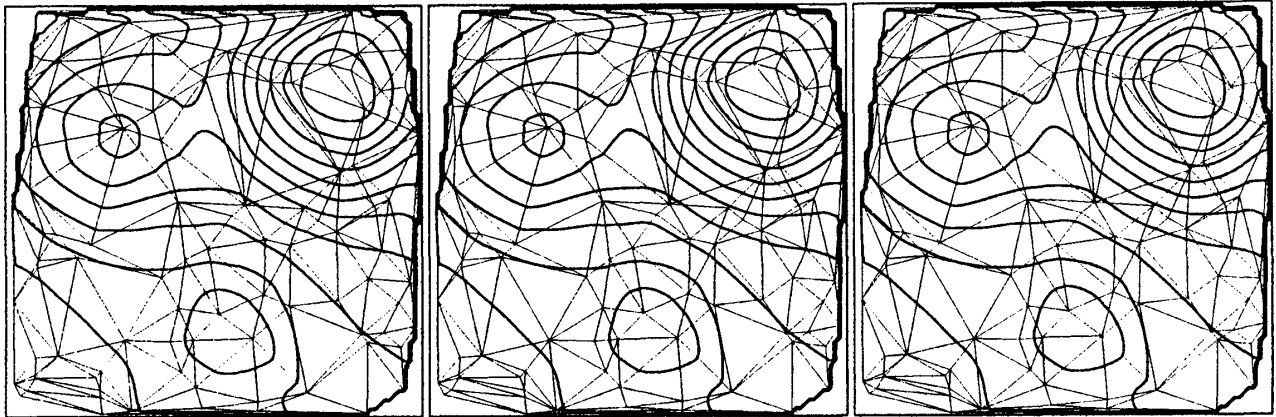


図 2 繰り返し 1 回目

図 3 繰り返し 2 回目

図 4 MNN の直接法

偏微係数が次式のように $f_x(i, j, k)$ の重心結合で表せるし、局所性の範囲も明確にできるからである。

$$S_{x_i} = \frac{1}{\sum_{(i,j,k) \in M_i} w_{ijk}} \sum_{(i,j,k) \in M_i} f_x(i, j, k) w_{ijk}, \quad (8)$$

$$S_{y_i} = \frac{1}{\sum_{(i,j,k) \in M_i} w_{ijk}} \sum_{(i,j,k) \in M_i} f_y(i, j, k) w_{ijk}. \quad (9)$$

計算を繰り返すと次第に遠くの点に加わるけれどもその影響は式 (6) の重みの冪乗で急速に小さくなる。従って 2 回目で打ち切っても十分利用できる。従って既に行きあがっている曲面の一部を他に影響しないように修正するとき、影響範囲を制限できることになる。このとき繰り返し回数を一定にする必要はなく、特に必要なところは繰り返しを多くすることもできる。また式 (5) を連立して解いたものと組み合わせることもできる。

3. 補間曲面例

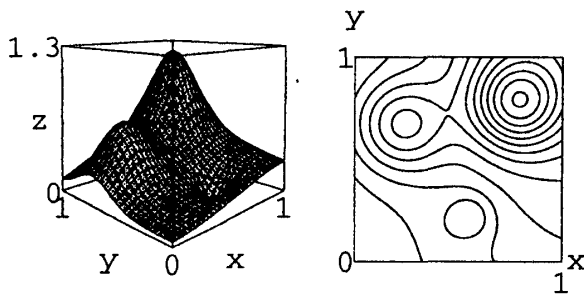


図 1 比較のための関数

上記の補間法による曲面を Franke による次式の関数データを使って比較する。

$$T(x, y) = \frac{3}{4} e^{-\frac{1}{4}[(9x-2)^2 + (9y-2)^2]} + \frac{3}{4} e^{-[\frac{1}{45}(9x+1)^2 + \frac{1}{10}(9y+1)]}$$

$$-\frac{1}{5} e^{-[(9x-4)^2 + (9y-7)^2]} + \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{4}[(9x-7)^2 + (9y-3)^2]}.$$

データ点は一部の境界付近を除いて乱数で xy 面上に 100 点与えて、そこでの関数値を z 成分とした。ドロネー網分割は自動的に行ない、同一の分割を全ての場合に使った。図 1 に比較のための関数、図 2, 図 3, 図 4 に繰り返し 1 回目, 2 回目, 直接法による各曲面を示す。いずれも同じ z 座標値での等高線を表示している。繰り返し 2 回目で直接法と同じくらいの結果が得られているのがわかる。

4. まとめ

MNN 法を解析・整理して曲面設計に利用できるように SD 補間法を導いた。局所性をもたせ、さらにそれを臨機応変に制御できるもので、しかも計算量も少ない。

参考文献

- 1) Franke, R. and Nielson, G.M.: Scattered Data Interpolation and Applications: A Tutorial and Survey, Hagen, H., Roller, D. (eds.) *Geometric Modeling: Methods and their Applications*, Springer-Verlag (1991).
- 2) Hardy, R.L.: Theory and Applications of the Multiquadric-Biharmonic Method: 20 Years of Discovery 1968-1988, *Computers Math. Applic.*, Vol. 19, No. 8/9, pp.163-208 (1990).
- 3) Duchon, J.: Splines Minimizing Rotation-Invariant Semi-Norms in Sobolev Spaces, Schempp, W., Zeller, K. (eds.), *Multivariate Approximation Theory*, Birkhauser, Basel, pp.85-100 (1975).
- 4) Nielson, G.M.: A Method for Interpolation of Scattered Data based upon a Minimum Norm Network, *Math. Comp.*, Vol. 40, pp.253-271 (1983).
- 5) Foley, T.A., Dayanand, S. and Santhanam, R.: Cross Boundary Derivatives for Transfinite Triangular Patches, *Computing Suppl.*, Vol.8, pp.91-100 (1993).