6C－1

縮閉線に基づく曲率変化の滑らかな曲線の構成法 ―傾斜スプラインによる評価―

東京電機大学　○渡辺由美子　斉藤　剛　　豊田工業大学　東　正毅

1　はじめに

自動車ボディーのような工業製品の外形形状には，高品位な曲面が要求されている．特に，曲面上のハイライトやその曲面に映り込む映像に歪みがないことが，デザイナの美的意図を満たす大きな要因である．このためには，曲率の変化が滑らかに分布する曲面を構成する必要がある．

筆者らは，このような曲面の生成を目的とし，曲面の生成要素となる基本曲線を，その曲線の曲率分布を直接規定することにより，曲率変化が滑らかな曲線を構成する方法を提案した[1,2]．また，このようにして構成した曲線からの曲面生成の方法も報告した[3]．

筆者らの曲線生成方法は，目的とする曲線の曲率中心の軌跡である縮閉線 (evolute) を規定し，そこから得られる伸開線 (involute) として，曲率変化の滑らかな曲線を得るものである．縮閉線は，２次有理Bézier曲線[2]または３次Bézier曲線[3]で表現し，その伸開線を３次有理Bézier曲線で近似することにより，実際のCADシステムで扱いやすくしている．

本報告は，このように縮閉線により生成された曲線が，どのような性質を持つ曲線かを明らかにすることである．ここでは，線幅が変化する薄い定規（傾斜スプライン）のモデルを生成し，そのモデルにより生成された曲線との比較を行う．

結果として，筆者らの方法により，上記の定規により生成された曲線と同様の曲線が得られること，また，本報告でのモデルが曲率０を含む曲線のモデルとなることが得られた．

Generation of Curves and Surfaces with Smoothly Varying Curvature Based on Evolutes
Yumiko WATANABE, Tsuyoshi SAITOH (Tokyo Denki Univ.,2-2 Kanda, Chiyoda-ku,Tokyo,101)
Masatake HIGASHI (Toyota Technological Institute, 2-12-1,Hisakata,Tempaku-ku,Nagoya,468)

2　縮閉線による曲線の生成

曲線の曲率中心の軌跡の軌跡が，微分幾何における縮閉線である．この縮閉線沿いに糸を張り，それを展開した曲線が伸開線である．

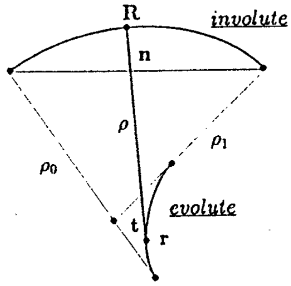


図１：縮閉線と伸開線

生成対象曲線 (R) の条件を，縮閉線 (r) の境界条件に置き換えると，図１に示すように，縮閉線の両端位置と接線方向，および両端点での曲率半径である．縮閉線の曲線長 s_e をパラメータとすると，伸開線 $\mathbf{R}(s_e)$ は，定義より，

$$\mathbf{R}(s_e) = \mathbf{r}(s_e) + (\rho_0 - s_e)\mathbf{t}(s_e), \quad (1)$$

ここで，$\mathbf{t}(s_e)$ は，曲線 $\mathbf{r}$ の単位接線ベクトル

と表すことができる．伸開線の曲率半径 ρ は，定義より $\rho - s_e$ であり，縮閉線の長さ l_e は，$\rho_0 - \rho_1$ となる．

筆者らの方法は，この縮閉線を有理２次 Bézier 曲線および３次 Béizer 曲線で表現する．さらに，伸開線のままでは，扱いが不便であるので，これを基準線として，有理３次 Bézier 曲線で近似表現した．

3　生成曲線の評価

3.1　傾斜スプライのモデル

このように縮閉線から定めた曲線を評価するために，同一拘束条件で線幅が変化するスプラインが生成する曲線との比較を行う．モデルを図２に示す．本モデルでの解析において，上記の傾斜スプラインを定幅

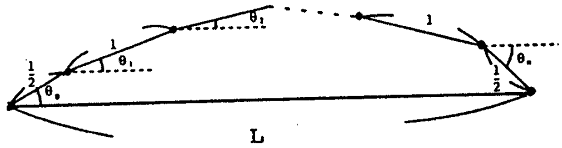
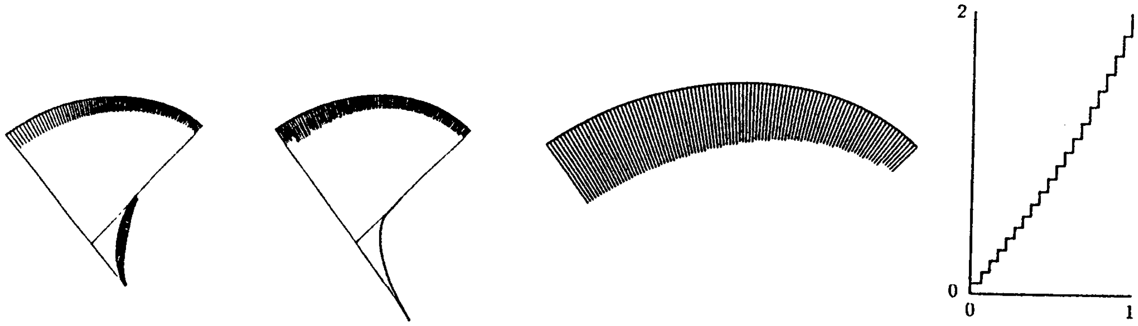


図２：傾斜スプラインモデル



(a) 縮閉線による生成　(b) 弾性エネルギー最少曲線　(c) 傾斜スプラインモデルの曲線

図3: 生成曲線の比較

の小片の列で近似し，この定規を曲げたとき，各小片は円弧を形成する仮定した．そこで，両端点での接線方向と曲率半径を拘束条件として，この円弧列に蓄えられる弾性エネルギーの最小となる曲線を求める．弾性エネルギーは，

$$E = \sum_{i=1}^{n} \frac{l \cdot (\theta_{i-1} - \theta_i)}{r_i} \cdot m_i(\theta_{i-1} - \theta_i), \qquad (2)$$

ここで，$r_0 = \rho_0, r_n = \rho_1$

である．ここで，$m_i(\theta_{i-1} - \theta_i)$ は，小片の幅と曲がり角度に対応した係数である．E が最小となるθ_i を変分法により求める．

$$f_1 = \sum_{i=0}^{n} l\cos\theta_i - L, \quad f_2 = \sum_{i=0}^{n} l\sin\theta_i,$$

$$F = E + \lambda f1 + \lambda f2$$

と置き，

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \theta_i} = 0$$

を解く．

3.2 曲線の比較

図3に，同一の境界条件で，縮閉線により求めた伸開線と上記の方法で求めた弾性エネルギー最少曲線を示す．さらに，文献3）で示した，伸開線を多辺形により近似した比較曲線により生成した曲線を示す．

4 複合曲線の扱い

デザイナは，曲線定規や「しない定規 (spline)」で曲線を描くが，一度に描ける範囲を「単位曲線」と呼ぶ．この単位曲線は，曲線内の曲率変化は単調である．実際の曲線は，単位曲線をつなぎあわせる (これを複合曲線と呼ぶ) ことにより，曲線形状全体を生成する．このとき，曲率中心が反転する部分を含む場合もある．この点では，曲率半径は，無限大となり，この部分の縮閉線は構成できない．

そこで，筆者らは，本報告で用いたモデルにより，一方の端点での曲率が0の曲線を生成させ，これに基づき3次有理 Bézier 曲線で目的とする曲線を近似することとした．図5に，本モデルにより生成した曲線およびその曲率プロファイルを示す．

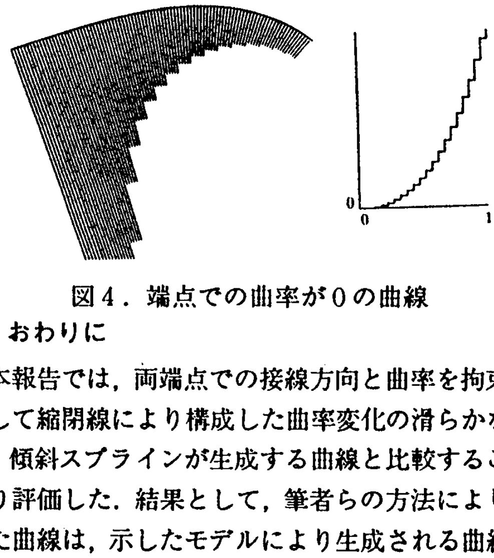


図4．端点での曲率が0の曲線

5 おわりに

本報告では，両端点での接線方向と曲率を拘束条件として縮閉線により構成した曲率変化の滑らかな曲線を，傾斜スプラインが生成する曲線と比較することにより評価した．結果として，筆者らの方法により生成した曲線は，示したモデルにより生成される曲線の性質と類似し，その物理的な意味付けができた．また，本モデルが，曲率0の曲線の生成にも利用できることを示した．

参考文献

1) 毛利，東:「縮閉線に基づく曲率変化の滑らかな有理Bézier曲線の生成」，精密工学会春期大会予稿集，1992.

2) 斉藤，穂坂，東:「縮閉線に基づく曲率変化の滑らかな曲線・曲面の生成 (第2報)」，精密工学会秋期大会予稿集，1992.

3) 東，毛利，川畑:「縮閉線に基づく曲率変化の滑らかな曲線・曲面の生成 (第3報)」，精密工学会秋期大会予稿集，1992.

4) 斉藤，渡辺，東:「縮閉線に基づく曲率変化の滑らかな曲線の生成」，情報処理学会春期大会，1993.