ハイブリッド有理関数近似の誤差評価

甲 斐 博†

ハイブリッド有理関数近似（以下では HRFA と呼ぶ）は近似 GCD の重要な興味深い応用の 1 つである．データの平滑化や，ハイブリッド積分により近似不定積分や定積分を求める等の研究が行われており幅広い応用が期待できる．HRFA では有理関数補間の分子と分母の多項式の近似 GCD を計算することにより有理関数補間の不必要な極が取り除かれる．HRFA により高精度の近似が得られることが実験的に示されている．理論面からの誤差評価も試みられているが，HRFA の誤差評価はいまだ不十分である．本論では，近似の誤差と近似 GCD のパラメータの関係を述べる．その結果を用いて，得られる有理関数近似に誤差評価を与えるアルゴリズムが得られる．Hribernig and Stetter の近似 GCD をその誤差評価のために用い，誤差評価のための定理を示す．

Error Estimation of Hybrid Rational Function Approximation

HIROSHI KAI†

Hybrid Rational Function Approximation (HRFA) is one of the most important applications of approximate-GCD algorithms and is applied to several practical problems such as data smoothing, integral and others. Classical rational interpolation may not yield useful approximations of continuous functions by the presence of poles over the approximation range. In HRFA, the poles are removed by computing the approximate-GCD of the numerator and the denominator polynomials of the interpolated rational function. In this paper, a method of how to estimate the numerical error of rational interpolation obtained by HRFA is proposed. An approximate-GCD proposed by Hribernig and Stetter is used for the analysis. A theorem and a new algorithm is established for the error estimation.

1. はじめに

実数を R と表し，$x_i \in R, i = 0, \cdots, m+n$ と対応した値を $f_i := f(x_i) \in R, i = 0, \cdots, m+n$ とする．ここで，$x_0 < x_1 < \cdots < x_{m+n}$ とし，$f(x)$ は区間 $[x_0, x_{m+n}]$ において連続である（未知の）関数と仮定する．すなわちデータ集合

$$D = \{(x_0, f_0), (x_1, f_1), \cdots, (x_{m+n}, f_{m+n})\}, \tag{1}$$

を考え，D を正確に（もしくは近似的に）補間し $f(x)$ を近似する問題について考える．

多項式補間は，x_i が等間隔の場合，関数によっては区間 $[x_0, x_{m+n}]$ において多項式補間が振動することが知られている．この場合，Tchebycheff 補間のように x_i の選点が重要になる．そこで，本論ではより適用範囲の広い有理関数による近似を考える．

古典的な有理関数補間の代数問題は，非負の整数 m, n に対し次の関係を満たす $P(x)$ と $Q(x)$ の多項式を計算することである．

$$r_{k,l}(x_i) = \frac{P(x_i)}{Q(x_i)} = f_i, \ i = 0, \cdots, m+n. \tag{2}$$

ここで，$k = \deg P(x) \le m$, $l = \deg Q(x) \le n$ とすると，分子と分母の多項式の次数がそれぞれ k, l, すなわち，その有理関数を次数 (k, l) の有理関数という．式 (2) の有理関数補間は線形方程式

$$P(x_i) - f_i \cdot Q(x_i) = 0, \ i = 0, \cdots, m+n, \tag{3}$$

を解くことにより計算できる．そのほかに，Thiele 補間連分数等，多くの有理関数補間を求める方法が提案されている[4]．

有理関数補間を関数近似として用いる場合次の問題がある[2]．

(1)　$x = x_i$ において 0/0 になる有理関数補間が得られる（すなわち，到達不能点が存在する可能性がある）．

(2)　実区間 $[x_0, x_{m+n}]$ に有理関数の極が存在する．

(1) の場合，与えられたデータ集合を補間する次数 (m, n) の有理関数が存在しないため解が得られない．

† 愛媛大学工学部情報工学科
Department of Computer Science, Faculty of Engineering, Ehime University

この問題に対し，到達不能点があるかどうか判定し，そのような点がなければ有理関数補間を求めるアルゴリズムが文献 5) 等で示されている．しかし，関数近似を考える場合は次に述べる (2) の場合がより重要である．

実区間 $[x_0, x_{m+n}]$ に有理関数の極が存在する場合を考える．仮定より関数 $f(x)$ が連続なので，有理関数補間 $P(x)/Q(x)$ は極と極の近傍で $f(x)$ に対する近似誤差が大きいと考えられる．この問題に対し，Braess[2] は $f(x)$ の有理関数補間が $[x_0, x_{m+n}]$ で極を持たない条件を証明した．しかし，式 (1) のようなデータ集合に対する条件は何ら示されていない．この問題を避けるために，式 (2) とは次数が異なるいくつかの有理関数近似が提案されている．Berrut and Mitterlmann[1] による線形有理関数補間は到達不能点を持たず，$[x_0, x_{m+n}]$ に極を持たない．結果として次数 $(m+n, m+n)$ の有理関数補間が得られる．

それに対し，より次数の低い近似を得る古典的な有理関数補間を改良した有理関数近似としてハイブリッド計算を基礎にしたハイブリッド有理関数近似（HRFA）が提案されている[10),18)]．ここでハイブリッド計算とは数式処理計算のアルゴリズムを基礎として数値計算を融合させた計算を意味する．線形有理関数補間との比較は文献 8) で述べた．HRFA によりハイブリッド計算に適した近似が与えられる．本論では，HRFA に関して詳しく議論する．

ここで，不必要な極の例として文献 2) で述べられている次の事実を示す．

例題 1.1 $f(x) = e^x$ に対する有理関数の補間の 1 つとして，

$$r_{2,2}(x) = \frac{(x+5)^2}{(x-5)^2},$$

を考える．$r_{2,2}(x)$ は，

$$x_2 = 0, -x_1 = x_3 \in [3,4], -x_0 = x_4 \in (5,6)$$

を通る．しかし，$r_{2,2}(x)$ は $x = 5$ で極を持ち，補間の区間で $f(x)$ と性質が異なる．

例題 1.1 より一般に不必要な極は除去不能である．しかし，数値実験によると次のような興味深い現象が起こる場合が知られている．

連続な関数を有理関数補間で近似することを考え，高精度の近似を得ようとして点数を多くすると $Q(x)$ が $[x_0, x_{m+n}]$ で零点を持つ．すなわち有理関数補間が不必要な極を持つ．多くの場合，不必要な極に対し $P(x)$ が極に近い零点を持つことが実験的に示された[10)]．分子と分母の $[x_0, x_{m+n}]$ にある近接根を取り除くために近似 GCD を用い，改良された連続な近似が得られる．この方法を HRFA と呼ぶ．HRFA では不必要な極を取り除くために Sasaki and Noda[12)] により提案された近似 GCD が用いられる．

HRFA に対する誤差評価が文献 7) 等で試みられているが条件などが大きく十分ではない．誤差の大きさは近似 GCD のパラメータ ϵ に依存する．しかしパラメータと近似精度の関係は例題によって示されているのみであり，理論的には示されていない．本論ではこの点を明確にすることを試みる．

HRFA では近似 GCD の計算のため，$p(x_i) - f_i \cdot q(x_i)$ の値は一般には 0 と異なる（しかし，0 に非常に近い）．そこで，HRFA の近似精度の良さの尺度として次の δ を評価することを考える．すなわち HRFA の精度を次式で定義する．

$$|f(x_i) - r_{k,l}(x_i)| \le \delta, \ i = 0, \cdots, m+n. \quad (4)$$

ここで，$k \le m$, $l \le n$ である．

我々は HRFA の誤差評価の方法を提案する．この目的に対し，Hribernig and Stetter により提案された近似 GCD を用いる．HRFA と近似 GCD を 2 章と 3 章でまとめる．4 章において，我々は近似 GCD を使った HRFA の精度に関する定理を示す．HRFA と誤差評価の例を 5 章で示し，そこで得られる結果が定理を満足することを示す．

2. ハイブリッド有理関数近似

丸め誤差等により入力や演算に不正確性が存在する場合，式 (3) の線形方程式の計算において，次の興味深い現象がおこる．$P(x)$ と $Q(x)$ の実際の次数を，$0 < d < \min(m,n)$ を満足する整数 d に対し $m-d$ と $n-d$ とする．$f(x) = P(x)/Q(x)$ は $[x_0, x_{m+n}]$ で連続であると仮定する．そのとき，数値解はそれぞれ次数 m, n の 2 つの多項式 $\tilde{P}(x)$ と $\tilde{Q}(x)$ を生成する．このとき，ある z に対し，同時に $\tilde{Q}(z) = 0$, $\tilde{P}(z) \ne 0$ の状態を持つ可能性がある．そのとき，$\tilde{P}(x)/\tilde{Q}(x)$ は $f(x)$ の $x = z$ とその近傍における良い関数近似になりえない．この場合に，近似を改良する自然な方法は，$\tilde{P}(x)$ と $\tilde{Q}(x)$ の近似 GCD $g(x)$ を計算し，商 $p(x) = \tilde{P}(x)/g(x)$, $q(x) = \tilde{Q}(x)/g(x)$ を計算し，最後に $p(x)/q(x)$ を $f(x)$ に対する有理関数近似とすることである．

データ列が有理数や整数（入力が正確）の場合，連分数を用いた有理関数補間を用いれば正確に $P(x)/Q(x)$ を得ることができる．また，誤差のない入力に対し，最小次数の連分数補間を数値的に求めるプログラムが文献 15) で示されている．しかし，入力が不正確な場合，従来の補間方法とは異なる方法が必要である．

$f(x)$ を $[x_0, x_{m+n}]$ で連続な初等関数としたときは，上の場合とは異なり，有理関数補間の次数は一般に (m, n) であると考えられる．しかし，$f(x)$ を補間すると分子と分母の多項式が互いに近接した根を持ち，$[x_0, x_{m+n}]$ に不必要な極を持つ場合があることが実験的に示されている．この場合も同じ考え方が適用でき不必要な極を取り除くことができる．

これらの手順をハイブリッド有理関数近似（HRFA）と呼び，次のようにアルゴリズムを示す．

アルゴリズム 2.1 （HRFA）

入力： データ集合 D，パラメータ ϵ

出力： 有理関数補間 $p(x)/q(x)$

方法：

(1) データ集合 D を補間する有理関数 $P(x)/Q(x)$ を計算する．ここで $\deg P = m$，$\deg Q = n$ とする．

(2) Sasaki and Noda の近似 GCD のアルゴリズムにより $P(x)$ と $Q(x)$ の近似 GCD $g(x)$ をパラメータ ϵ を与えて求める．

(3) 次のように $p(x)$ と $q(x)$ を求める．

$$p(x) = \mathrm{quo}(P(x)/g(x)),$$
$$q(x) = \mathrm{quo}(Q(x)/g(x)).$$

ここで，quo は多項式除算の商を表す．

ここで問題は，得られる結果が近似 GCD の計算のためデータ列を通過しないことである．その誤差を与えることはアルゴリズム開発の面から重要であるがまだ示されていない．

近年，先駆的な Schönhage[13]，Sasaki and Noda[12] 以外にいくつかの近似 GCD のアルゴリズムが提案されており[18]，この問題に適用できる．それらの近似 GCD は近似 GCD の定義に対し異なるノルムを用いている．たとえば，L_1 ノルム[6),11)]，L_2 ノルム[3),9)] 等である．多項式 $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ に対するこれらの L_1 ノルム $\|p(x)\|_1$ と L_2 ノルム $\|p(x)\|_2$ は次の式で表される．

$$\|p(x)\|_1 = \sum_{i=0}^{n} |a_i|,$$

$$\|p(x)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} |a_i|^2}.$$

そのほかに，ある領域におけるノルムを用いた方法[14] 等が提案されている．本論では，HRFA の誤差評価を議論するため，Hribernig and Stetter の近似 GCD[6] を用いることを考える．

3. Hribernig and Stetter による近似 GCD

$C[x]$ は複素係数多項式とする．ここで，多項式のノルムは L_1 ノルムを用い，$\|p(x)\| := \|p(x)\|_1$ とする．近似 GCD は文献 6) では 2 つの多項式 $f_1, f_2 \in C[x]$ の near-GCD と呼ばれるが，次のように定義される．

定義 3.1 （Hribernig and Stetter） 精度 α において，もし

$$\mathrm{GCD}(f_1^*, f_2^*) = \tilde{g},\ \|\tilde{f}_i - f_i^*\| \le \alpha,\ i = 1, 2, \quad (5)$$

を持つ多項式 $f_i^* \in C[x], i = 1, 2,$ が存在するなら，2 つの多項式 $\tilde{f}_i \in C[x]$, $i = 1, 2$ はnear-GCD $\tilde{g}$ を持つ．等価的に，$\tilde{f}_1$ と $\tilde{f}_2$ の near-GCD $\tilde{g}$ は

$$\tilde{f}_i = \tilde{g} \cdot \tilde{q}_i + \tilde{r}_i,\ \|\tilde{r}_i\| \le \alpha, i = 1, 2,$$

を満足する．また，精度 α での near-GCD は α-GCD$(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$ と表される．

near-GCD $\tilde{g}$ はユークリッド互除法と，精度 α で改良された緩められた停止条件により計算される．f_1 と f_2 の α-GCD を計算するアルゴリズムは次のようにまとめられる．

アルゴリズム 3.1 （α-GCD）

入力： f_1，f_2，α

出力： f_1 と f_2 の α-GCD

方法：

(1) 次の計算を $i = 1, 2$, $j = 2, 3, \cdots$ に対し行う．

$$f_{j-1} = f_j \cdot q_j + f_{j+1},$$
$$s_j^{(i)} = q_j s_{j-1}^{(i)} + s_{j-2}^{(i)},\ j > i.$$

ただし，$s_{i-1}^{(i)} = 0$, $s_i^{(i)} = 1$, である．

(2) もし $\|s_{j-1}^{(i)} f_{j+1}\| \le \alpha$, なら次のように f_1 と f_2 の α-GCD が求まる．

$$f_j = \alpha\text{-GCD}(f_1, f_2).$$

このアルゴリズムにより生成された多項式 f_j は，

$$f_i = s_j^{(i)} f_j + s_{j-1}^{(i)} f_{j+1},\ j > i \ge 1, \quad (6)$$

のように表すことができる．我々の場合，f_1，f_2 は $P(x)$, $Q(x)$ と表され，$s_j^{(1)}$，$s_j^{(2)}$，f_j は，$p(x)$, $q(x)$, $g(x)$ とそれぞれ表される．したがって，式 (6) は

$$\left\{ \begin{array}{lcl} P(x) & = & p(x)g(x) + \delta P(x), \\ Q(x) & = & q(x)g(x) + \delta Q(x), \end{array} \right. \quad (7)$$

となる．ここで，$\delta P(x) = s_{j-1}^{(1)} f_{j+1}$，$\delta Q(x) = s_{j-1}^{(2)} f_{j+1}$ である．

4. HRFA の誤差

定義 3.1 により，$p(x)/q(x)$ と $P(x)/Q(x)$ の間の誤差は次の定理で評価される．

定理 4.1　$P(x), Q(x) \in C[x]$ とする．$\delta P(x)$ と $\delta Q(x)$ を式 (7) において $\|\delta P(x)\| \le \alpha < 1$ と $\|\delta Q(x)\| \le \alpha < 1$ を満足する多項式とする．そのとき，

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)} - \frac{p(z)}{q(z)}\right| \le \left(1 + \left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right|\right) \cdot \frac{\alpha}{1-\alpha}, \quad (8)$$

が，$|Q(z)| \ge 1$ を満たす $z \in [-1, 1]$ において成り立つ．

証明

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)} - \frac{p(z)}{q(z)}\right| = \left|\frac{\delta P(z)}{Q(z)} - \frac{P(z)}{Q(z)} \cdot \frac{\delta Q(z)}{Q(z)}\right| \cdot \frac{1}{1 - \left|\frac{\delta Q(z)}{Q(z)}\right|}. \quad (9)$$

停止条件 $\|\delta P(z)\| \le \alpha < 1$, $\|\delta Q(z)\| \le \alpha < 1$ より，$\max_{-1 \le z \le 1} |\delta P(z)| \le \alpha < 1$, $\max_{-1 \le z \le 1} |\delta Q(z)| \le \alpha < 1$ が成り立つ．したがって，式 (9) により $|Q(z)| \ge 1$, $z \in [-1, 1]$ について式 (8) が成り立つ．□

$x_0 \ne -1$ または $x_{m+n} \ne 1$ の場合は，$\tilde{x}_i = -1 + 2(x_i - x_0)/(x_{m+n} - x_0)$ として x_i を $\tilde{x}_i$ に変換する．$\tilde{x}_i$ を新たに x_i と置くことにより，$x_i \in [-1, 1]$ の場合のみを考えても一般性を失わない．

定理 4.1 は HRFA の誤差を与える．D に対する有理関数近似 $p(x)/q(x)$ の精度は，定理 4.1 により，

$$\left|f(x_i) - \frac{p(x_i)}{q(x_i)}\right| \le (1 + |f(x_i)|) \cdot \frac{\alpha}{1-\alpha}, \quad (10)$$

により α を用いてあらかじめ評価できる．ただし，すべての i について $|Q(x_i)| \ge 1$ とし，到達不能点は存在しないと仮定する．実際の計算においては，$|Q(x_i)| \ge 1$ に規格化した有理関数補間を用いることで仮定が成り立つ．

式 (10) を用いることにより，HRFA のアルゴリズムを書き換えることができる．式 (4) のように有理関数近似の精度 δ を望む場合，式 (10) は α に対し $\alpha = \delta/(1 + F + \delta)$ を与える．ここで，$F = \max_{i=0,\cdots,m+n}\{|f_i|\}$ である．α により近似 GCD を計算することにより，精度 δ の有理関数近似が得られる．従来の HRFA（アルゴリズム 2.1）を次のように改良できる．

アルゴリズム 4.1（改良された HRFA）

入力： $x_i \in [-1, 1]$ とするデータ集合 D，有理関数近似の精度 δ

出力： 有理関数近似 $p(x)/q(x)$

方法：

(1)　D を補間する有理関数補間 $P(x)/Q(x)$ を求める．

(2)　$c = \min_{i=0,\cdots,m+n} |Q(x_i)|$ とし，$\bar{P}(x) = P(x)/c$, $\bar{Q}(x) = Q(x)/c$ と規格化する．

(3)　$f_1 = \bar{P}(x)$，$f_2 = \bar{Q}(x)$ をアルゴリズム 3.1 の入力多項式とする．$\alpha = \delta/(1 + F + \delta)$ として，α-GCD(f_1, f_2) を計算し，次の有理関数を得る．

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{s_j^{(1)}}{s_j^{(2)}}.$$

ただし，$F = \max_{i=0,\cdots,m+n}\{|f_i|\}$ である．

このアルゴリズムの出力として得られる有理関数補間は，(1) で到達不能点が存在しない場合，次のことが期待できる．

- $P(x)/Q(x)$ に含まれる不必要な極を取り除く．
- $\max_{i=0,\cdots,m+n} |f_i - p(x_i)/q(x_i)| \le \delta$ を満足する．

5. 改良された HRFA の例題

ここでは次の事実について例題を示す．

(1)　アルゴリズム 4.1 の次のデータ集合に対する動作手順を示す．

$$\begin{aligned} D = \{&(-1.0, 0.0384615),\\ &(-0.8, 0.588235), (-0.6, 0.1),\\ &(-0.4, 0.2), (-0.2, 0.5), (0, 1.0),\\ &(0.2, 0.5), (0.4, 0.2),\\ &(0.6, 0.1), (0.8, 0.0588235),\\ &(1.0, 0.00384615)\}. \end{aligned}$$

得られる近似の精度 $\delta = 10^{-10}$ として，不必要な極を取り除くことを考える．

(2)　アルゴリズムにより得られる近似が誤差評価式 (10) を満足するかどうかを示す．

D は関数 $f(x) = 1/(1 + 25x^2)$ を離散点 x_i で評価することにより得られたデータ集合である．丸め誤差等の演算の不正確さにより D の有理関数補間は次のようになる．

$$R_{5,5} = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

ここで $P(x)$ と $Q(x)$ は有効桁 15 桁で近似的に

$$\begin{aligned} P(x) = &-1.49293 \cdot 10^{-14} x^5\\ &+ 1.02597 \cdot 10^{-14} x^4\\ &+ 17.3865 x^3 + 6.94508 x^2\\ &- 1.19119 x + 1.00000,\\ Q(x) = &\ 434.663 x^5 + 173.627 x^4\\ &- 12.3932 x^3 + 31.9450 x^2\\ &- 1.19119 x + 1.00000, \end{aligned}$$

のように線形方程式を解くことにより得られる．ここで $P(x)$ の主係数と 2 番目の係数は 0 と見なすこと

ができる．したがって，deg $(P(x)) = 3$ である．

次に $c = \min_{i=0,\cdots,10} |Q(x_i)| = 1.00000$ であるので，$\bar{P}(x) = P(x), \bar{Q}(x) = Q(x)$ とおかれる．

$F = 1$ より，パラメータは $\alpha = 10^{-10}/(1+1+10^{-10}) = 5.0 \times 10^{-11}$ とおく．そのとき near-GCD(P, Q) を求めると，

$$\text{near-GCD}(P,Q) = 1.73865x^3 + 6.94508x^2 - 1.19119x + 1.00000,$$

として得られる．したがって，有理関数近似は次のように得られる．

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{1.00000}{1.00000+2.94245 \cdot 10^{-14}x+25.0000x^2}.$$

得られた有理関数の最大誤差は，8.77076×10^{-15} である．この結果は与えた精度より小さい．したがって，定理が成り立つことが分かる．また，α より小さい係数を 0 と見なすと，

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{1}{1+25x^2},$$

と置き換えることができる．これは $f(x)$ に等しい．

ここで述べた例では入力は正確であるが，不正確な場合にも本論のアルゴリズムは適用できることが示されている[16),17)]．

6. まとめ

本論では，HRFA による有理関数補間の精度に関する議論を行い，HRFA の誤差評価法を near-GCD[6)] により確立することができた．これまで，HRFA の精度は数値例を通してのみ示されてきた．本論で述べた定理 4.1 は HRFA と近似 GCD アルゴリズムの間の関係を与えることができる．

同様の結果はその他の近似 GCD アルゴリズムに対しても得られると考えられる．すなわち L_1 ノルムを用いた近似 GCD では領域を $[-1, 1]$ とし本論と同じ方法が適用できる．明らかに L_2 ノルムは一般に L_1 ノルムの大きさより大きいので L_2 ノルムを用いた近似 GCD でも成り立つ．

本論の結果により，HRFA をより広い範囲のデータ解析，積分等に応用する場合に明確な誤差評価を与えることが可能になる．

HRFA に関しては次の議論が残っている．

- 我々の数値例は HRFA のアルゴリズムは連続な初等関数 $f(x)$ に対しても有効であることが示されている[10),17),18)]．どのような条件のもとで，$P(x)$ と $Q(x)$ の近接根が現れるかの解析を行う必要がある．
- 本論では，到達不能点が存在しないことを仮定して議論を行った．到達不能点が存在する場合へのアルゴリズムの対応も早急に考慮する必要がある．

謝辞 本論文をまとめるにあたり多くの貴重なご助言をいただきました愛媛大学工学部野田松太郎教授に感謝いたします．また貴重なご意見をいただいた査読者に感謝いたします．

参考文献

1) Berrut, J.-P. and Mittelmann, H.D.: Lebesgue Constant Minimizing Linear Rational Interpolation of Continuous Functions over the Interval, *Computers Math. Applic.*, Vol.33, pp.77–86 (1997).
2) Braess, D.: *Nonlinear Approximation Theory*, Springer-Verlag (1986).
3) Corless, R.M., Gianni, P.M., Trager, B.M. and Watt, S.M.: The Singular Value Decomposition for polynomial systems, *ISSAC*, pp.195–207 (1995).
4) Cuyt, A. and Wuytak, L.: *Nonlinear Methods in Numerical Analysis*, Elsevier Science Pub. B.V. (1987).
5) Baker, Jr., G.A. and Graves-Morris, P.: *Encyclopedia of Mathematics 59, Padé Approximations 2nd Edition*, Cambridge University Press (1996).
6) Hribernig, V. and Stetter, H.J.: Detection and Validation of Clusters of Polynomial Zeros, *J. Symb. Comp.*, Vol.24, pp.667–681 (1997).
7) Kai, H. and Noda, M.-T.: Approximate-GCD and Pade Approximation, *Proc. Asian Symposium on Computer Mathematics*, pp.81–90 (1995).
8) Kai, H., Saito, T. and Noda, M.-T.: Continuity Conditions of Rational Interpolation over the Interval (in Japanese), *Josai Information Sciences Researches*, Vol.9, No.1, pp.43–52 (1998).
9) Karmarkar, N. and Lakshman, Y.N.: Approximate Polynomial Greatest Common Divisors and Nearest Singular Poylnomials, *ISSAC*, pp.35–39 (1996).
10) Noda, M.T., Miyahiro, E. and Kai, H.: Hybrid rational function approximation and its use in the hybrid integration, *Advances in Computer Methods for Partial Differential Equations VII, IMACS*, pp.565–571 (1992).
11) Pan, V.Y.: Numerical Computation of A Polynomial GCD and Extensions, preprint (submitted to *SIAM Review*) (1996).

12) Sasaki, T. and Noda, M.T.: Approximate square-free decomposition and root-finding of ill-conditioned algebraic equations, *J. Inf. Proc.*, Vol.12, pp.159–168 (1989).
13) Schönhage, A.: Quasi-GCD Computations, *J. Complexity*, Vol.1, pp.118–137 (1985).
14) Sederberg, T.W. and Chang, G.-Z.: Best Linear Common Divisors for Approximate Degree Reduction, *Computer-aided design*, Vol.25, pp.163–168 (1993).
15) Werner, H.: Algorithm/Algorithm 51 A Reliable and Numerically Stable Program for Rational Interpolation of Lagrange Data, *Computing*, Vol.31, pp.269–286 (1983).
16) 甲斐 博，野田松太郎：ハイブリッド有理関数近似とデータの平滑化，日本応用数理学会論文誌，Vol.3, No.4, pp.323–336 (1993).
17) 野田松太郎，宮広栄一，甲斐 博：近似的GCDを用いた有理関数近似，数理解析研究所講究録，Vol.787, pp.150–162 (1992).
18) 野田松太郎，甲斐 博：数式処理と数値計算—いかに結合させるか?，情報処理，Vol.39, No.2, pp.105–110 (1998).

(平成10年5月6日受付)
(平成11年1月8日採録)

甲斐 博（正会員）

昭和45年生．平成7年3月愛媛大学大学院博士後期課程中退．平成7年4月同大学工学部情報工学科助手．ハイブリッド計算アルゴリズムの研究に従事．ACM，日本応用数理学会，日本数式処理学会各会員．