6F－8

単峰領域の概念を用いた一変数多峰性関数の最大点探索手法

金光 秀雄[1)]　宮腰 政明[2)]　新保 勝[2)]
[1)]北海道教育大学 函館校　[2)]北海道大学 工学部

1．はじめに

多峰性関数の最大点を探索する手法については，従来からの手法に加え，SA法やGA法などの新しい枠組みの手法が登場し，最近非常に研究が盛んになってきている[2,3]．しかし，これらの手法は従来の局所最適化手法のように効率的ではなく，しかもその収束性が示されていないものが多い．これは多峰性関数の性質が未知で，その性質を利用した手法が提案されていないことが大きな原因であると考えられる[3]．本稿では，孤立極大点を有する一変数多峰性関数について，その各極大点での単峰領域と単峰領域半径を新たに定義する．つぎに，この定義から，大域的最適化手法を提案し，本手法が最大点を見い出す条件を導く．最後に，数値実験から本手法の有効性を示す．

2．準　備

次の一変数多峰性関数の最大化問題を扱う．

$$(2.1)\quad \begin{cases} \text{関数}: f(x)\rightarrow \max, \\ \text{制約条件}: x\in S=[a,b]. \end{cases}$$

ここでは，複数の孤立極大点x_m^*がSの内点に存在することを仮定し，mの添字集合をMとする．また，極大点の中で最大の関数値を与える点の集合をX^{**}，関数値の集合をF^{**}で表す．

3．単峰領域および単峰領域半径の定義

S上で唯一の最大点x^{**}をもつ単峰性関数は，以下のように定義される[1]．

$$(3.1)\quad \begin{cases} f(x_1)<f(x_2), & x_1<x_2\leqq x^{**} \\ f(x_1)>f(x_2), & x^{**}\leqq x_1<x_2 \end{cases}\quad \forall x_1, \forall x_2\in S.$$

以上の定義から，複数の極大点を有する多峰性関数において，各極大点における単峰領域を次のように定義できる．

［定義１］x_m^*の単峰領域:Dum$(a_m^*, b_m^*; x_m^*)$

x_m^*を含む開区間(a_m, b_m)が存在して，次式

$$(3.2)\quad \begin{cases} f(x_1)<f(x_2), & x_1<x_2\leqq x_m^* \\ f(x_1)>f(x_2), & x_m^*\leqq x_1<x_2 \end{cases}\quad \forall x_1, \forall x_2\in (a_m, b_m)\subset S$$

を満足する最大開区間(a_m^*, b_m^*)をx_m^*における単峰領域と呼び，Dum$(a_m^*, b_m^*; x_m^*)$で表す．また，各極大点での単峰領域半径を次のように定義する．

［定義２］x_m^*の単峰領域半径:$r(x_m^*)$

$$(3.3)\quad r(x_m^*)=\min\{x_m^*-a_m^*,\ b_m^*-x_m^*\}$$

単峰領域と単峰領域半径の例をFig.1に示す．

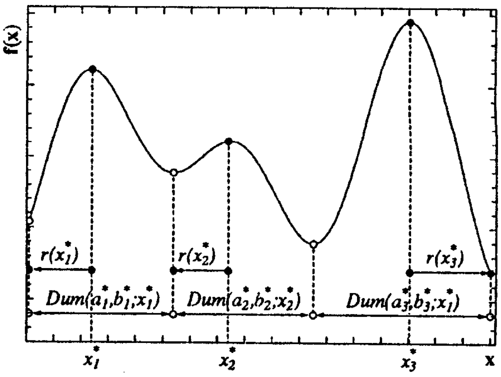

Fig.1: 多峰性関数の単峰領域と単峰領域半径

4．大域的最適化手法

ここで，4点$(x_1<x_2<x_3<x_4)$とその関数値(f_1, f_2, f_3, f_4)が与えられたとき，次のような仮定をする．

$$(4.1)\quad x_k\in \mathrm{Dum}(a_m^*, b_m^*; x_m^*)\ ;\quad (k=1,2,3,4)$$

$$(4.2)\quad x_m^*\in [x_2, x_3].$$

この仮定と(3.2)式より，$f_1<f_2$，$f_3>f_4$ となるから，f_2, f_3の大小関係より，

$$(4.3)\quad f_1<f_2, f_2\geqq f_3 \quad \text{または} \quad f_2<f_3, f_3>f_4$$

ろなる．一方，hの点の間隔でN+1個の点$(x_0, x_1, \cdots, x_N)$とその関数値$(f_0, f_1, \cdots, f_N)$が得られているときには，(4.3)から，$f_{i-2}\leqq f_{i-1}\geqq f_i$があるi(≧2)で成立すればよい．以上から，次

A Method for Seeking the Global Maximum of Univariate Multimodal Functions Using the Concept of a Unimodal Region.
Hideo KANEMITSU[1)], Masaaki MIYAKOSHI[2)] and Masaru SHIMBO[2)]
[1)]Hakodate Campus, Hokkaido University of Education, Hakodate 040, Japan
[2)]Faculty of Engineering, Hokkaido University, Sapporo 060, Japan

のアルゴリズムを構成することができる．

Algorithm $(X^{**}, F^{**}) \leftarrow \mathrm{GOPTUV}(a, b, h, \varepsilon)$;
[入力]a,b:探索領域の上下限，h:点の間隔
　　ε:許容誤差
[出力]X^{**}:最大点の集合，F^{**}:最大値の集合

```
N←(b-a)/h;  {N:分割数の計算}
f**←-∞; m←0; F**←φ; X**←φ;
for  i←0  to  N  do
   xi←a+ih; fi←f(xi);
   if  i≧2 and fi-2≦fi-1≧fi  then
  {3点から2次関数近似で極大点x*mを求める}
      x*m ←xi-1 + h(fi-2−fi) / 2(fi-2−2fi-1+fi) ;
      f*m←f(x*m); m←m+1;
      if  f**<f*m  then  f**←f*m
   fi;
od;
for  i←1  to  m  do
   if  f**<fm+ε  then
      X**←X**+{x*m}; F**←F**+{f*m}
   fi;
od;
```

5．最大点を見い出す条件

前節のアルゴリズムで最大点x^{**}を見い出す条件は，x^{**}の単峰領域上で(4.1)，(4.2)式を満足する4点が存在すればよいから，

(4.5)　$x_{i-k} \in \mathrm{Dum}(a^{**}, b^{**}; x^{**})$; $(k=0,1,2,3)$,
(4.6)　$x^{**} \in [x_{i-2}, x_{i-1}]$,

となる．各点の間隔がhであることから，以上の条件を満足する4点の状況はFig.2のようになる．

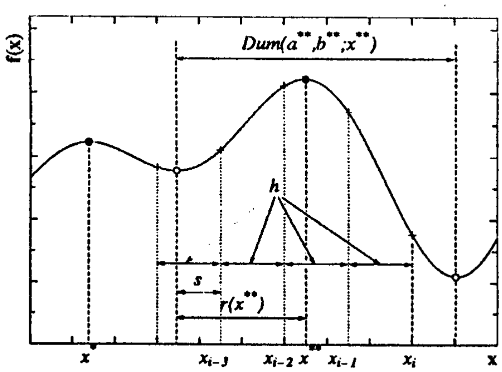

Fig.2: 最大点x^{**}での単峰領域上の4点

Fig2.から，最小点の単峰領域上に常にこの4点が入り，さらに(4.6)式より，$x_{i-2} \leqq x^{**} \leqq x_{i-1}$であることから，

(4.7)　$h+s \leqq r(x^{**})$;　$0<s\leqq h$,

を満足しなければならない．よって，$\forall s \in (0, h]$で(4.7)式を満足するためには，

(4.8)　$h \leqq \frac{1}{2} r(x^{**})$,

が成立しなければならない．一方，全ての極大点を見い出すための条件は，hが全ての単峰領域半径の最小より小さければよいから，

(4.9)　$h \leqq \frac{1}{2} \left[\min_{m \in M} \{r(x^*_m)\}\right]$

で与えられる．

6．数値例

次の関数[2]の最大化問題を考える．

$$f(x) = \sum_{i=1}^{5} \sin((i+1)x+i)), \quad x \in [-10, 10]$$

このときx^{**}の単峰領域半径は，$r(x^{**}) = \pi/6$であるから，(4.8)式より $h=\pi/12$ として本手法を適用すると，以下のような結果が得られた．

関数評価回数：97回，極大点19個(最大点3個)

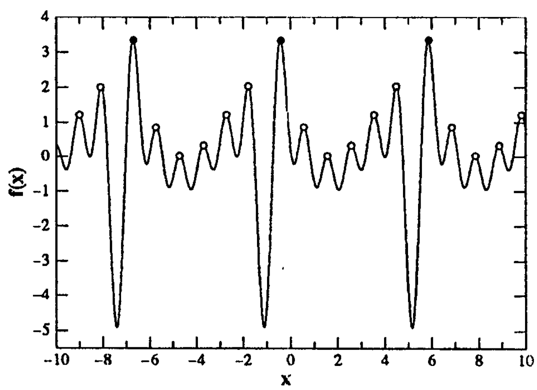

Fig.3: 探索結果(黒丸:最大点，白丸:極大点)

7．結　言

単峰性領域の概念を用いた一変数多峰性関数の大域的最適化手法を提案し，この手法が最大点を見い出す条件を導き，その有効性を数値例により示した．この手法は非常に単純で容易に実現可能である．

［参　考　文　献］

[1] 今野 浩，山下 浩：非線形計画法，日科技連，p.158(1978).
[2] A.A.Torn, and Antanas Zilinskas,A.: Global Optimizaton, Lecture Notes in Comp. Sci. 350, Springer-Verlag (1989).
[3] A.A.Zhingljavsky: Theory of Global Random Search, Mathematics and Its Applications, Kluwer Acd.Pub.,(1991).