多項式の零点同時決定のための反復法について

3E－10

菅野 幸夫 愛媛大学大学院工学研究科
Nikolai V. Kjurkchiev ブルガリア科学アカデミー数学研究所
山本 哲朗 愛媛大学理学部数学科

1. はじめに

多項式 $P(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$ の全ての零点を同時に求める Durand-Kerner (D-K) 法は

$$z_i^{k+1} = z_i^k-\sigma_i^k,\quad \sigma_i^k=\frac{P(z_i^k)}{\prod_{j\neq i}(z_i^k-z_j^k)}, \tag{1}$$

$$1\le i\le n,\quad k\ge 0$$

により定義される．この方法は連立方程式

$$f_i = (-1)^i\sum_{1\le j_1<\cdots<j_i\le n} z_{j_1}\cdots z_{j_i}-a_i=0, \tag{2}$$

$$1\le i\le n$$

に適用された Newton 法であり，n 個の零点が相異なるとき，収束速度は局所的に2次である．また，D-K 法の改良として，次の3次収束法はよく知られている．

(I) Börsch-Supan 1963, Aberth 1973, 他：

$$z_i^{k+1} = z_i^k-\frac{1}{\dfrac{P'(z_i^k)}{P(z_i^k)}-\sum_{j\neq i}\dfrac{1}{z_i^k-z_j^k}}, \tag{3}$$

$$= z_i^k-\frac{\sigma_i^k}{1+\sum_{j\neq i}\dfrac{\sigma_j^k}{z_i^k-z_j^k}}, \tag{4}$$

$$1\le i\le n,\quad k\ge 0$$

(II) 田辺 1983：

$$z_i^{k+1} = z_i^k-\sigma_i^k\Big(1-\sum_{j\neq i}\frac{\sigma_j^k}{z_i^k-z_j^k}\Big), \tag{5}$$

$$1\le i\le n,\quad k\ge 0$$

(III) Nourein 1977：

$$z_i^{k+1} = z_i^k-\frac{P(z_i^k)}{\prod_{j\neq i}(z_i^k-z_j^{k+1,DK})},$$

$$1\le i\le n,\quad k\ge 0,$$

$$z_j^{k+1,DK}=z_j^k-\sigma_j^k$$

これらは，D-K 法の加速と見做される．また，SOR 型加速として次の反復が考えられる．

(IV) SOR 型加速：

$$z_i^{k+1} = z_i^k-\omega\frac{P(z_i^k)}{\prod_{j<i}(z_i^k-z_j^{k+1})\prod_{j>i}(z_i^k-z_j^k)}, \tag{6}$$

$$1\le i\le n,\quad k\ge 0$$

(V) SOR 型加速：

$$z_i^{k+1} = z_i^k-\omega\frac{P(z_i^k)}{\prod_{j<i}(z_i^k-z_j^{k+1,DK})\prod_{j>i}(z_i^k-z_j^k)},$$

$$1\le i\le n,\quad k\ge 0 \tag{7}$$

ただし，ωは加速パラメータ．

ここでは，これらの反復法について考察し，その収束の様子・反復列の挙動等について数値例を交えて論じる．

2. Chebyshev 法と Halley 法

C^nにおける非線形方程式

$$F(z)=0,\quad z=(z_1,\cdots,z_n)$$

を解く3次収束法としては，Chebyshev 法 (正接放物線法)，Halley 法 (正接双曲線法) が知られている．ただし，F''と$\Gamma_k=F'(z^k)^{-1}$の存在を仮定する．

(VI) Chebyshev 法：

$$z^{k+1} = z^k-\Big[I+\frac{1}{2}\Gamma_kF''(z^k)\Gamma_kF(z^k)\Big]\cdot\Gamma_kF(z^k),\quad k\ge 0$$

On Some Methods for the Simultaneous Determination of Polynomial Zeros

Sachio Kanno
Ehime University, Matsuyama 790, Japan
Nikolai V. Kjurkchiev
Bulgarian Academy of Sciences, Sofia 1090, Bulgaria
Tetsuro Yamamoto
Ehime University, Matsuyama 790, Japan

(VII) Halley 法：

$$z^{k+1} = z^k - \left[I - \frac{1}{2}\Gamma_k F''(z^k)\Gamma_k F(z^k)\right]^{-1} \cdot \Gamma_k F(z^k), \quad k \geq 0$$

このとき，次のことが成り立つ．

定理 1． 田辺法は (2) に適用された Chebyshev 法に同値である．

系 1．1． 田辺法の反復解は重心不変性をもつ．

系 1．2． 田辺法は 3 次収束する．

3．反復 (3)–(5) の収束

反復 (3)–(5) の 3 次収束性はよく知られているが，その証明は通常，個別的になされている．しかし，それらに対し一様な収束解析を与えることができる．また，このとき，いずれの方法も

$$w^{k+1} = w^k - \sigma^k + \tau^k, \quad \|\tau\| = O(\|\sigma^k\|^2)$$

の形に書き表せる．ここで，$w^k - \sigma^k$ は D-K 法による近似解であるので，これらを D-K 法の加速と見做すことができる．

4．SOR 型加速の収束

SOR 型加速について次のことが成り立つ．

定理 2． $0 < \omega < 2$ かつ n 個の零点が相異なるならば，反復 (6) は局所的に収束する．

定理 3． 初期近似 $z_i^0,\ i = 1, \cdots, n$ が n 個の関係式

$$\sum_{i=1}^{n} z_i^0 \left(\frac{1}{\omega}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{z_i^0 - z_j^{1,DK}}{z_i^0 - z_j^0} - 1\right) - a_1 = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} z_i^0 \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} z_j^0 \left(\frac{1}{\omega}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{z_i^0 - z_j^{1,DK}}{z_i^0 - z_j^0} - 1\right) + \sum_{\ell < s} z_\ell^0 z_s^0 + a_2 = 0,$$

$$\cdots$$

$$\sum_{i=1}^{n} z_i^0 \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} z_j^0 \left(\frac{1}{\omega}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{z_i^0 - z_j^{1,DK}}{z_i^0 - z_j^0} - 1\right) + (n-1)\prod_{j=1}^{n} z_j^0 + (-1)^n a_n = 0$$

を満たすとき，反復 (7) は続行不能である．

m 重根の近傍において，D-K 列の m 個が重根を中心とする円周上の m 等分点に位置し，直線的に重根に近づくことはよく知られている．SOR 型加速の場合，図 1 に示すように，列の螺旋状の振舞いが観察される．この現象は次の理由による．

z_i^+ および z_i^* をそれぞれ z_i の D-K 法と SOR 型加速 (6) による改良とすれば，関係式

$$\arg(z_i - z_i^*) = \arg(z_i - z_i^+) + \sum_{j<i}\{\arg(z_i - z_j) - \arg(z_i - z_j^*)\}$$

が得られる．$i \geq 2$ とし，不等式

$$\sum_{j<i}\{\arg(z_i - z_j) - \arg(z_i - z_j^*)\}$$

が満足されたとき，

$$\arg(z_i - z_i^*) > \arg(z_i - z_i^+)$$

が成り立つ．D-K 法は放射状に収束するので，これは SOR 型加速の螺旋状の収束を説明する．

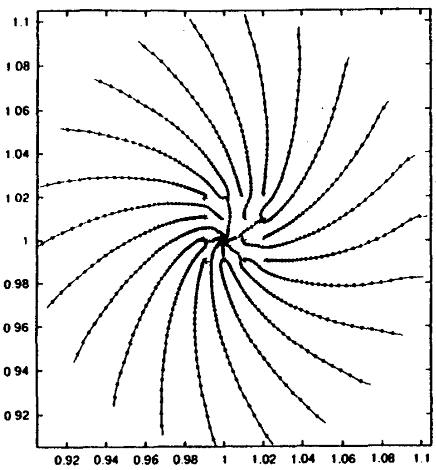

図 1．SOR 型加速 (6) による反復列の挙動 ($\omega = 1.2$)

5．まとめ

多くの研究者により D-K 法の様々な改良が提案されてきたが，数値実験等の結果からみて，実用上の見地からは，反復 (1), (6) は依然として最も効率的な方法のように思える．

参考文献

1) T. Yamamoto, S. Kanno and L. Atanassova, Validated computation of polynomial zeros by the Durand-Kerner method, to appear in "Topics in Validated Computations", edited by J. Herzberger.