特異摂動方程式のウェーブレット近似

3E－8

橋本佳明＊　，長谷川泰洋＊＊　，　山本　浩＊
＊：名古屋市立大学教養部
＊＊：名古屋市立大学医学部

量子力学、弾性理論、流体力学などさまざまの分野に現れる特異摂動問題における転移点の問題を数値解析の立場から取り扱う。特に、次の Dirichlet 問題の解の漸近挙動のシミュレーションを目的とする。

$$(1)\quad \varepsilon\frac{d^2x_\varepsilon(t)}{dt^2}+a(t)\frac{dx_\varepsilon(t)}{dt}+b(t)x_\varepsilon(t)=f(t)\quad;\quad -1<t<1$$

境界条件　；　$x_\varepsilon(-1)=\alpha$　，　$x_\varepsilon(1)=\beta$

小さな正のパラメータ ε を０に近づけたとき、(1) の極限方程式は階数低下を引き起こすことより、上の Dirichlet 問題の境界条件は過剰となる。このため、(1) の解は摂動方程式の境界の近傍では境界条件を満たし、境界から少し離れた内部では近似的に極限方程式を満たすことになり、境界層が生じる。この方程式の低階の係数が零点をもつ関数を含む転移点の問題に関しては、ＷＫＢ法や摂動論での Jeffreys の方法などがある。ここでは、局所性を特色とする Wavelet 解析による方法を用いて解を近似し、そのシミュレーションより解の挙動を調べる。

このため、Support Compact な Wavelet を以下の手順で構成する。

1．Support compact な Wavelet 関数を構成するため、次の式を満たす係数 $\{h_0, h_2, \cdots, h_{2N-1}\}$ を求める。

$\Sigma h_k=\sqrt{2}$　　，　$\Sigma h_k h_{k+2m}=\delta_{0,m}$　（任意のｍ）

$\Sigma(-1)^k h_{-k+1}k^m=0$　；　$0\leqq m\leqq N-1$

Wavelet Solution of a Singular Perturbation equation

Yoshiaki Hashimoto *　Yasuhiro Hasegawa **　Yutaka Yamamoto *
* College of General Education , Nagoya City University
** Medical School , Nagoya City University

2．scaling function ϕ のフーリエ変換 Fϕ から Daubechies Wavelet を作る。

$$m(\xi)=\sqrt{2}\ \Sigma h_k\cdot\exp(i k \xi)$$

$$F\phi(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \Pi m(2^{-k}\xi)$$

$$\psi(x)=\Sigma(-1)^k h_{-k+1}\phi(2x-k)$$

Dirichlet 問題を以下の変分問題に帰着させる。

3．各nを固定したとき、関数空間Vを以下のように定義する。

$V_n=\psi_{n,k}(x)$（kは整数）の一次結合で張られるL^2の部分空間

（ただし、$\psi_{j,k}(x)=2^{j/2}\psi(2^j x-k)$.）

$V_n\subset V_{n+1}$ ，　$L^2=\Sigma V_n$（直交和）

$V_n\cap H^1$で定義域を（-1,1）に制限したもの空間をVとする。

このとき、Vの元は次の形に表すことができる。

(2)　$u(x)=\Sigma u(n,k)\psi_{n,k-2N+1}(x)$

4．次の線形方程式の解が求める近似解である。

Lax-Milgram の定理より、(1) は次の形に表せる。

(3)　$A(u,v)=b(v)$　　任意の$v\in V$

これから、次の線形方程式 (4) の解 u(n,k)を求めればよい。

$A=(A(\psi_{n,j-2N+1}(x),\psi_{n,i-2N+1}(x)))_{j,i}$

$B=(b(\psi_{n,j-2N+1}(x)))$ ，　$U=(u(n,i))_i$

(4)　$AU=B$

以上の手順で求めた u(n,k) を (2) に代入して、近似解 u(x) が求まる。

u(x) → (1) の解　（n→∞ のとき）

εを小さくしたときのシミュレーションから解の漸近挙動を考察する。

＜文献＞

Daubechies,I, Ten Lectures on Wavelets ,CBMS-NSF ,1992

Glowinski.R ,Lawton.W ,Ravachol.M ,Tenenbaum.E ,
Wavelet Solutions of Linear and Nonlinear Elliptic,Paraboloc and Hyperabolic Problems in One Space Dimension

橋本佳明 ，転移点をもつ特異摂動問題について，Bull Coll General Education Nagoya City University , Vol.32 ,p35-52 (1986)