

Meyer wavelet and Time series analysis

3E-7

\*中村 正治

\*\*藤井 勝紀

\*\*\*山本 浩

名古屋銀行

愛知工業大学

名古屋市立大学

1. はじめに

時間と共に変動する関数を解析する方法は、社会現象、工学や生物学だけでなく多くの分野でも必要となってきた。われわれは、測定された時系列データの個数が比較的小数の場合にも適用できる時系列解析方法としてウェーブレット補間法 (WIM: Wavelet Interpolation Method) を提唱する。

時系列データ  $\{(t_i, y_i); i=1, 2, \dots, n\}$  からウェーブレット解析を用いて  $y = F(t)$  とその密度関数  $f(t)$  を補間する。このため、Yves Meyer による滑らかな Analysing Wavelet  $\psi(x)$  をコンピュータによる数値計算から求める。  $L^2$ -関数  $F$  の wavelet 展開における近似式からそのウェーブレット係数を求めるため、与えられたデータを基にした連立方程式を解く。この係数を用いて  $F(t)$ 、 $f(t)$  の近似関数のグラフ表示をする。応用例として、身長発育曲線と発育速度曲線のグラフを近似的に表し、密度関数の極値から時系列データの性質を導き出すことができることを示す。

2. ウェーブレット補間法 (WIM)

Y. Meyer は、Multiresolution approximation により次の定理を証明した。

定理、任意の  $L^2(R)$ -関数  $F$  は analysing wavelet 関数  $\psi(x)$  を用いて

$$(2-1) \quad F(t) = \sum_{j,k} \alpha_{j,k} \psi(2^j t - k)$$

と直交展開 (ウェーブレット展開という) できる。この展開式 (2-1) は、古くから知られている Banach 空間での Schauder 展開の一般化になっている。この Schauder 展開の特徴として、基底となる局所的関数は、 $j, k$  で定められた  $\varepsilon$ -support で定義されていることから、 $j$  を大きくするとこの  $\varepsilon$ -support をいくらかでも小さくできる。従って、関数  $F(t)$  の異常性 (不連続性、微係数の不連続性や極値など) を解明できる。ただし、ここで関数  $\psi(x)$  の  $\varepsilon$ -support とは  $\{x: |\psi(x)| > \varepsilon\}$  とし、 $\varepsilon$  は十分

小さい正数とする。

$n$  個の時系列データ  $\{(t_i, y_i); i=1, 2, \dots, n\}$  が与えられているとき、(2-1) の有限和とする  $\{t_i, y_i\}$  に対する  $n$  個の線形連立方程式

$$(2-2) \quad y_i = \sum_{j,k} \alpha_{j,k} \psi(2^j t_i - k)$$

の解として、ウェーブレット係数  $\{\alpha_{j,k}; n \text{ 個の } j, k\}$  を求める。このウェーブレット係数を (2-1) に代入した近似曲線  $y = F_n(t)$  は与えられた  $n$  個のデータの点を補間した曲線となる。更に、展開式 (2-1) の右辺が項別微分可能とすると、両辺を微分することにより、 $F$  の密度関数  $f$  もウェーブレット展開でき、次の式が成立する。

$$(2-3) \quad f(t) = \sum_{j,k} \alpha_{j,k} 2^j \psi'(2^j t - k)$$

ただし、 $\psi' = \frac{d\psi}{dt}$  とする。

この (2-3) 式より、 $F(t)$  と同様に  $f(t)$  もコンピュータによるグラフ表示ができ、時系列曲線の局所的特性が同定できる。この一連の作業をウェーブレット補間法という。以上の解析が行えるための条件として  $\psi(x)$  は十分滑らかな関数であるように構成できなければならない。

3. ウェーブレット解析について

十分滑らかな Y. Meyer の analysing wavelet  $\psi(x)$  を構成する。

1. 区間  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  で定義された有界な正の関数

$\gamma_1(x)$  を定義する。

$\gamma_1(x) = \gamma_1(-x) : 0 \leq \gamma_1(x) \leq M$  (ただし、 $M$  は正の定数)

2.  $\gamma_1(x)$  から区間  $[0, 1]$  上の関数  $\gamma_2(x)$  を定義する。

$\gamma_2(x) = \gamma_1\left(x - \frac{1}{2}\right) : 0 \leq x \leq 1$

3.  $\gamma(x)$  として

$\gamma(x) = c \int_0^x \gamma_2(u) du$  ただし、 $c^{-1} = \int_0^1 \gamma_2(u) du$

この  $\gamma(x)$  から、次の関数  $\Phi(\xi)$  を定義する。

\*Syuji Nakamura, The Bank of Nagoya, 19-17, Nishiki 3-chome, Naka-ku, Nagoya 460.

\*\*Katsunori Fujii, Aichi Institute of Technology, 247, Yahigusa, Yakusa-chou, Toyota-city, Aichi 470-03.

\*\*\*Yutaka Yamamoto, Nagoya City University, 1-1, Yamahata, Mizuho-chou, Mizuho-ku, Nagoya 467.

$$\xi \leq \frac{-4\pi}{3} \quad \text{のとき, } \Phi(\xi) = 0$$

$$\frac{-4\pi}{3} \leq \xi \leq \frac{-2\pi}{3} \quad \text{のとき,}$$

$$\Phi(\xi) = \sqrt{\gamma \left( \frac{3}{2\pi} \xi + 2 \right)}$$

$$\frac{-2\pi}{3} \leq \xi \leq \frac{2\pi}{3} \quad \text{のとき, } \Phi(\xi) = 1$$

$$\frac{2\pi}{3} \leq \xi \leq \frac{4\pi}{3} \quad \text{のとき, } \Phi(\xi) = \sqrt{\gamma \left( \frac{-3}{2\pi} \xi + 2 \right)}$$

このとき、 $\Phi(\xi)$  は次の性質を満たす、SupportコンパクトなR上の有界関数である。

補題.

(1)  $\Phi(\xi) \geq 0$ , かつ  $\xi \geq 0$  のとき  $\Phi(\xi)$  は単調

減少関数

(2)  $\Phi(\xi) = -\Phi(-\xi)$

(3)  $|\xi| \geq \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \Phi(\xi) = 0, |\xi| \leq \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \Phi(\xi) = 1$

(4)  $-\frac{2\pi}{3} \leq \xi \leq \frac{4\pi}{3}$  のとき、 $\Phi(\xi)^2 + \Phi(\xi - 2\pi)^2 = 1$

$\Phi(\xi)$  を用いて、以下の式で定義された関数  $\Psi(\xi)$  は Yves Meyer の Analysing Wavelet  $\psi(x)$  のフーリエ変換である。

$$(3-1) \quad \Psi(\xi) = \exp\left(\frac{-i\xi}{2}\right) \sqrt{\left\{ \Phi\left(\frac{\xi}{2}\right) \right\}^2 - \left\{ \Phi(\xi) \right\}^2}$$

Yves Meyer の Analysing Wavelet 関数の具体例

ある。

$$(3-2) \quad \psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} 2 \cos\left\{ \left(x - \frac{1}{2}\right)u \right\} \sqrt{1 - A(u)} du + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/3}^{2\pi/3} 2 \cos\left\{ \left(x - \frac{1}{2}\right)u \right\} \sqrt{A(2u)} du$$

積分の部分は簡単な関数に表示できないため、ニュートン・コッツなどの積分公式を用いて計算機で近似計算する。これにより  $\psi(x)$  のグラフが表示できる。

#### 4. 応用

実験などでは、観測時点が比較的少ない時系列データしか測定できない場合があるが、連続時間での時系列曲線の特性を議論しなければならない場合がある。このような場合、ウェーブレット補間法を用いれば、近似的に時系列曲線が描けることから、この要求を満たすことができる。この応用例として、発育発達学の分野においてはすでに1940年頃から人

の成長のプロセスを関数(時系列曲線)で表す試みが行われている。Logistic関数からCubic Spline関数や多項式等が用いられてきたが、何れの関数もいろいろと問題が生じてくる。われわれの提唱するWIMでは、時系列曲線が滑らかな関数であると仮定するだけで、成長曲線と発育速度曲線の近似ができる。6才から17才までの男子の身長を発育をグラフにしたのが図1である。この発育速度曲線(図1の点線)の極大値からPHV(Peak Height Velocity)の年齢が決定できる。さらに、最近議論され始めたafter growth spurtの現象などが分析できることである。詳細は[2]を参照されたい。

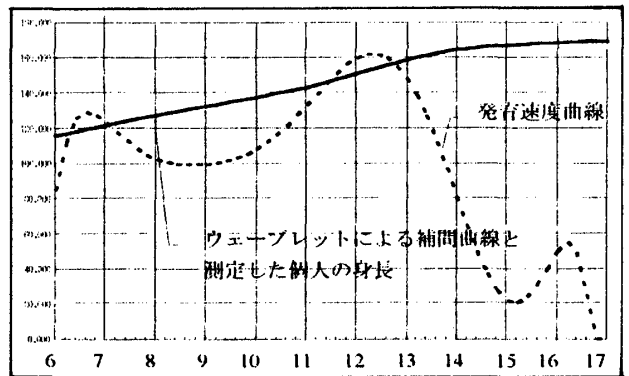


図1 Growth distance curves and velocity curves (発育速度曲線の値は1次導関数の値を20倍してある)

#### <文献>

[1] Frage.M, Hunt.J.C.r and Vassilicos.J.C :Wavelet s, Fractals, and Fourier Transforms, Clarendon Press, 1993

[2] 藤井勝紀, 川浪憲一, 長谷川泰洋, 山本 浩 “ウェーブレット解析による身長の時系列分析” 発育発達研究 第22号,p21-28, 1994

[3] Mallat.S: Multiresolution Approximations and Wavelet Ortonomal Bases of  $L^2(R)$ , Trans of Amer Math Soc, 315 ,P69-87 ,1989

[4] Meyer.y : Ondelette et Operateur l ,Hermann,1 990 (English Edition :Wavelets and operators , Cambridge 1992)

[5] Strang.G : Wavelet Transforms versus Fourir Transforms,Bull A.M.S ,Vol.28,No.2 ,p288-305,1993

[6] 山口昌哉, 畑 政義, 木上 淳 :フラクタルの数理, 岩波応用数学,1993