常微分方程式の２次簡易解法とインパルス応答

3Ｅ－6

若林昭夫
電算応用研究所

１．はじめに

著者の創案になる演算子法[1]に基づき、R-K 法と同様に１ステップの２等分点を用いて３点近似する、R-K法より高精度な解法を導いた。その解法を紹介し、精度、安定性をR-K法と比較検討した結果と従来の評価の問題点について述べる。

２．２次簡易解法

演算子法において、ベクトル要素をΔ^2迄に制限すると、積分公式は次の行列演算で表される。

$$\begin{bmatrix}\Delta y_0\\ \Delta^2 y_0\end{bmatrix} = h\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2!6}\\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_0\\ \Delta f_0\\ \Delta^2 f_0\end{bmatrix} \qquad (1)$$

微分方程式を解くためには行列を細線で区切った３段階に分けて逐次に計算するが、この計算を階差でなく、３点の関数値の計算に直すと、

① $f_0=f(x_0,y_0)$, $y_1=y_0+hf_0$

② $f_1=f(x_1,y_1)$, $y_1=y_0+h(f_0+f_1)/2$, $y_2=y_0+h_2f_1$

③ $f_1=f(x_1,y_1)$, $f_2=f(x_2,y_2)$,

$$y_1=y_0+\frac{h(5f_0+8f_1-f_2)}{12},\quad y_2=y_0+\frac{h_2(f_0+4f_1+f_2)}{6}$$

但し、$H=(t_n-t_0)/n$, $h_2=x_2-x_0$, $h=H/2$, $x_1=x_0+h$

①はEuler法によるy_1の予測、②は台形法による修正と同時に中点法によるy_2の予測、③はA-M法によるy_1の修正と同時にSimpsonの⅓則によりy_2を修正する。更に、③により１回修正してy_2を得る。

ｎ階の微分方程式は置換して連立微分方程式とするが、実質は単なる逐次積分であり、本解法では微分方程式を(2)で与え、$y^{(n-1)}$～y 迄①を計算した後、同様に②③③と処理する。２回目の③による修正は$y^{(n-1)}$～y の後、$y^{(n-1)}$を再修正して終わる。

$$\frac{d^ny}{dt^n}=f(y^{(n-1)},y^{(n-2)},\cdots,y,z(t)) \qquad (2)$$

```
10 DIM Y0(6),Y1(6),Y2(6),Y(6):DEFINT E,J
12 DEF FNY1=(5*Y0(J3+1)+8*Y1(J3+1)-Y2(J3+1))*
  H3+Y0(J3):DEF FNY2=(Y0(J3+1)+4*Y1(J3+1)+Y2(
  J3+1))*H4+Y0(J3)
14 GOSUB 40:H0=(XE-XB)/N:PRINT"X= ";XB;"-";XE;
  "  N=";N;"  H=";H0:N1=ND+1
16 X2=XB:FOR IB=1 TO N:X0=X2:X2=XB+H0*IB:FOR
  J3=1 TO ND:Y0(J3)=Y(J3):NEXT
18 LOCATE 0,CSRLIN:PRINT"IB=";IB;" X=";X2;:
  GOSUB 30:X=X0:GOSUB 38:Y0(N1)=F
20 FOR J3=1 TO ND:Y1(J3)=Y0(J3+1)*H+Y0(J3):
  Y(J3)=Y1(J3):NEXT:GOSUB 32
22 FOR J3=1 TO ND:Y1(J3)=(Y0(J3+1)+Y1(J3+1))*H
  *.5+Y0(J3):Y2(J3)=Y1(J3+1)*H2+Y0(J3):Y(J3)=
  Y1(J3):NEXT:GOSUB 32:GOSUB 34
24 FOR J3=1 TO ND:Y1(J3)=FNY1:Y2(J3)=FNY2:
  Y(J3)=Y1(J3):NEXT:GOSUB 32:GOSUB 34
26 FOR J3=ND TO 1 STEP-1:Y1(J3)=FNY1:Y2(J3)=
  FNY2:Y(J3)=Y1(J3):NEXT:GOSUB 32:GOSUB 34:J3=
  ND:Y1(J3)=FNY1:Y2(J3)=FNY2:Y(ND)=Y2(ND)
28 X#=X2:GOSUB 42:GOSUB 36:NEXT IB:END
30 H2=X2-X0:H=H0*.5:H3=H/12:H4=H2/6:X1=X0+H:
  RETURN
32 X=X1:GOSUB 38:Y1(N1)=F:RETURN
34 X=X2:FOR J3=1 TO ND:Y(J3)=Y2(J3):NEXT:
  GOSUB 38:Y2(N1)=F:RETURN
36 YY#=Y(1):LOCATE 40,CSRLIN:PRINT USING
  "Y=##.#######^^^^   True=##.########^^^^";
  YY#;Y#:RETURN
38 F=-2*Y(1)-2*Y(2):RETURN:'FUNCTION F(X,Y)
40 XB=0:XE=90:N=900:ND=2:Y(1)=0:Y(2)=1:RETURN
42 Y#=EXP(-X#)*SIN(X#):RETURN:'True Y
```

［注］ $Y(k)=y^{(k-1)}$, ND=階数, N=分割数

３．インパルス応答

(2)において$z(t)=k\delta(t)$, $y_0^{(n-1)}$～$y_0=0$のとき、区間$[0,\varepsilon]$ $\varepsilon\to0$では$y^{(n)}=k\delta(t)$であるから積分すると$y_0^{(n-1)}=k$を得、他の初期値は変わらない。$t>0$では$\delta(t)=0$故、$z(t)=0$に変えた同次方程式を解けばインパルス応答が得られる。$y''+2y'+2y=\delta(t)$は初期値$y_0=0$, $y_0'=1$で$y''+2y'+2y=0$を解けばよく、区分幅0.1の本解法とR-K法の解を次表に示す。

本解法はRunge K.法より略１桁精度が良い。区間$[0,2h]$をｈを用いた数式計算により解くと、

$$y_2=2h-(2h)^2+\frac{(2h)^3}{3}-\frac{(2h)^5}{36} \qquad \left(真は\ \frac{(2h)^5}{30}\right) \qquad (3)$$

The Simple Calculus and Impulsive Response of
Ordinary Differential Equations
Akio Wakabayashi
DENSANOYO Lab.
21-17 Daikancho,Hiratsuka,Kanagawa 254,Japan

となり、R-K法ではh^5の項が現れないからである。

t	2次簡易法	Runge K.法	真　　値	Exp.
0.1	9.0333059	9.0333343	9.03330122	10^{-02}
0.2	1.6265677	1.6265723	1.62656693	10^{-01}
0.3	2.1892685	2.1892738	2.18926760	10^{-01}
0.4	2.6103503	2.6103556	2.61034923	10^{-01}
2.0	1.2305982	1.2305877	1.23060025	10^{-01}
3.0	7.0258616	7.0253122	7.02595149	10^{-03}
4.0	-1.3861313	-1.3861323	-1.38613212	10^{-02}
10.0	-2.4698591	-2.4699193	-2.46985202	10^{-05}
20.0	1.8817083	1.8816610	1.88172041	10^{-09}
30.0	-9.2454568	-9.2445311	-9.24562742	10^{-14}
40.0	3.1653754	3.1646361	3.16550467	10^{-18}
50.0	-5.0599047	-5.0560449	-5.06055459	10^{-23}
60.0	-2.6692692	-2.6705149	-2.66907748	10^{-27}
70.0	3.0765473	3.0765424	3.07656351	10^{-31}
80.0	-1.7937585	-1.7934069	-1.79382132	10^{-35}
81.0	-4.1818638	-4.1794793	-4.18225295	10^{-36}
82.0	7.6516205	7.6563370	7.65092855	10^{-37}
83.0	8.7012940	8.6687695	8.70155450	10^{-37}
84.0	2.4258100	2.4146370	2.42370770	10^{-37}
85.0	-2.1319470	-2.1310768	-2.14125438	10^{-38}

4．精度の評価

本解法を①②③迄にするとh^5の項は現れず、R-K法と同精度になる。このとき③のy_1の修正は不要で①②③はR-K法の形式に記述できるが、R-K法の未定係数を決める連立方程式の一つを満たさない。h^4の項は必ずしもTaylor展開と一致しないからであるが本解法はStirlingの積分公式に一致する解を求めているのであり、Taylor展開による評価は不適当である。この点はR-K法も同じで、h^4迄Taylor展開と一致することが必ずしも精度と関係ないことはTaylor展開の収束の遅い解を調べれば分かる。

$y'=y^{-1}$，$y_0=0.5$ の解$y=\sqrt{2t+0.25}$のTaylor展開は

$$y=0.5+2t-4t^2+16t^3-80t^4+448t^5-2688t^6+\cdots \quad (4)$$

$t=0.125$のときt^4迄の和は0.699219で真値0.7071067と有効桁２桁であり、t^6迄でも同様である。本解法は0.707132、R-K法は0.707190で有効桁４桁ある。ｈを用いた数式解は有理式となるが、級数展開すれば本解法はh^4、R-K法はh^5以降がTaylor展開と異なる。有理式の値はこの無限級数を遥か高次の項迄加算したことに相当し、数値解と一致する。

Taylor展開は$t=0$の近傍の精度を保証し、Newtonの補間公式は$t=0$から離れても区分点近傍の精度を保証する。この違いが上記の違いを生ずる。

h^4の項迄Taylor展開と一致することは最悪の場合の精度を保証する意味はあるが、h^4の項が一致しない本解法の実際の精度が２桁も高精度では数値解法の良否を判断する根拠にはならない。

5．安定性

Milne法で不安定を起こす $y'+ty=0$，$y_0=10$ を区分幅0.1で解くと、次表に示すように、本解法は有効桁２桁に減少するが10^{-38}迄解ける。R-K法は解けるが有効桁がなくなる。この微分方程式を微分すると、$y''+ty'+y=0$，$y_0=10$，$y_0'=0$ を得る。この解は元の微分方程式の解と同じで、次表に示すように安定に減少するが真の解から完全に外れる。

t	$y'+ty=0$	$y''+ty'+y=0$	真　　値	Exp.
0.1	9.9501247	9.9501247	9.95012479	10^{0}
0.2	9.8019867	9.8019867	9.80198673	10^{0}
0.3	9.5599747	9.5599756	9.55997478	10^{0}
4.8	9.9309967	9.9511737	9.92949522	10^{-05}
5.3	7.9517440	8.1370781	7.94938558	10^{-06}
5.7	8.8123642	1.05×10^{-6}	8.80816483	10^{-07}
5.8	4.9590409	6.64×10^{-7}	4.95639984	10^{-07}
9.6	9.8055567	9.98×10^{-8}	9.72094942	10^{-20}
13.2	1.4567406	7.22×10^{-8}	1.45970747	10^{-37}
13.3	3.8621109	7.16×10^{-8}	0.00000000	10^{-38}

更に安定に解けるe^{-t}とe^{-2t}が基本解の微分方程式 $y''+3y'+2y=0$も、$y_0=0, y_0'=1$ なら $y=e^{-t}-e^{-2t}$を正しく解けるが、$y_0=1, y_0'=-2$ なら安定に減衰するが真の解 $y=e^{-2t}$から完全に外れる。こゝに「インパルス応答より減衰の速い解は広範囲に渡って正しく解くことはできない」という法則が見出される。

$y'+y=0$，$y_0=1$ を微分した $y''+y'=0$，$y_0=1, y_0'=-1$ はインパルス応答でないが、解 $y=e^{-t}$は正しく解ける。しかし、$y_0'=-1.0000000597$#=$(81800001)_{16}$とすれば内部単精度末尾１の違いで e^{-t}から完全に外れる。$y_0'=-(1+\varepsilon)$のとき真の解は $y=(1+\varepsilon)e^{-t}-\varepsilon$であるが、これからも完全に外れる。この真の解は$y=e^{-t}-\varepsilon(1-e^{-t})$と表され、第２項は$y_0=0$，$y_0'=-\varepsilon$の解、即ち、$-\varepsilon\delta(t)$のインパルスによる応答である。整数係数の微分方程式を整数初期値で解いた結果は特異な場合で一般性のない場合がある。

6．おわりに

自動制御において物理系のインパルス応答が物理系の特性を知る上で重要であるが、微分方程式の数値解は物理系のシミュレーションでもあり、真の解との差は数値解法の特性を表し、解法の精度及び安定性を知る上でインパルス応答が重要である。

［参考文献］［1］演算子法と超並列処理，若林昭夫著，1994，A5版346頁，¥3600，送料¥400．