多項式の係数入力誤差と根の誤差およびその対策

3Ｅ－１

田口　功
千葉敬愛短期大学　国際教養科

1．はじめに

ニュートン法，BIRGE-VIETA法を用いて多項式の根を計算する時，いずれも多項式の係数を入力し反復計算を行なって根を求める．係数は計算機に入力した時点で誤差を生じる．この誤差が，根に大きく影響する場合もある．係数入力誤差に対する根の誤差を最小に抑えておけば，求める根の累積誤差も当然少なくなるであろう．本稿では，一度求められた根(例えば単精度の時)を利用し全根の平行移動(倍精度で行なう)を行なって任意の根を0に近づけ，係数の誤差に対する根の影響を少なくする方法を提案する．すなわち，多項式の係数が計算機に入力された場合の係数誤差と根の誤差の関係($\Delta\xi \fallingdotseq (-\Delta a_n \xi^{n-1}-\Delta a_{n-1}\xi^{n-2}-\cdots-\Delta a_2\xi-\Delta a_1)/f'(\xi)$)を求め，$\Delta a_{n-1}$，$\Delta a_{n-2}$，…，$\Delta a_2$，$\Delta a_1$，$\xi$を減少させることにより根の誤差$\Delta\xi$を減少させる方法を理論的，技術的に提案する．ここでは，$\Delta\xi$を0に近づける方法を全根の平行移動によって行なった．平行移動で注意することは，係数移動に対し，単精度の係数入力に対してただ単に原点移動したのでは根の精度は変化しないことである．さらに，一度求められた根(誤差を含む)に対して，その値の有効桁数を平行移動量とするのであるが多くすればするほど2回目に計算される根の精度は，向上することがわかった．この結果，両反復法において倍精度で係数入力から反復法を行ない根を求めるよりも，一度単精度で根を求め，その根を用いて，倍精度で係数移動計算を行ない，さらに丸められた係数を使って単精度で反復計算を行なった結果，倍精度計算よりも根の誤差を少なくすることが出来た．この方法により，従来からBIRGE-VIETA法の欠点[1]となっていた累積誤差を少なくすることが出来た．[2]また，ニュートン法に対しても同様の結果を得た．すなわち，計算機を使用して両反復計算を行なう時，係数入力誤差に対する根の誤差を抑えるための方法を示した．ただし，本稿では一度目の数値計算においての計算結果が実数でしかも重根を含まない多項式の根に対する改善を扱った．

2．多項式の係数入力誤差に対する根の誤差

最初に，多項式の係数の変化が根に与える影響について考える。多項式

$$f(x)=x^n+a_n x^{n-1}+a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_2 x+a_1 \qquad (2\text{-}1)$$

の各係数がわずかに変化した多項式を

$$\bar{f}(x)=x^n+\bar{a}_n x^{n-1}+\bar{a}_{n-1}x^{n-2}+\cdots+\bar{a}_2 x+\bar{a}_1 \qquad (2\text{-}2)$$

とする。$f(x)$ の任意の根をξ，これに対応する $\bar{f}(x)$ の根を$\bar{\xi}$とする。ここで，$\bar{a}_{n+1}=a_{n+1}=1$とし，$\Delta a_{n+1}=0$とする，

$$\Delta a_{k+1}=\bar{a}_{k+1}-a_{k+1} \qquad (2\text{-}3)$$

$$\Delta\xi=\bar{\xi}-\xi \qquad (2\text{-}4)$$

とおく(k=0～n)．仮定から，

A method of improvement for the errors in the numerical computation of polynomials which has input coefficient errors for simple real roots
Isao Taguchi,Department of International Liberal Arts,Chiba Keiai Junior College

$$
\begin{aligned}
\bar{f}(\bar{\xi}) &= 0 \\
&= \bar{f}(\bar{\xi}) - f(\xi) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \{(a_{k+1} + \Delta a_{k+1})(\xi + \Delta\xi)^{k} - a_{k+1}\xi^{k}\} \\
&= \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(\xi)\,\Delta\xi^{k}/k! + \sum_{k=0}^{n-1} \Delta a_{k+1}\,\bar{\xi}^{k}
\end{aligned}
\tag{2-5}
$$

となる。(2-5)式から微分項の1次近似をとると，

$$
\begin{aligned}
f'(\xi)\Delta\xi &= -\Delta a_{n}(\xi+\Delta\xi)^{n-1} - \Delta a_{n-1}(\xi+\Delta\xi)^{n-2} \cdots - \Delta a_{2}(\xi+\Delta\xi) - \Delta a_{1} \\
&= -\Delta a_{n}\{\xi(1+\Delta\xi/\xi)\}^{n-1} - \Delta a_{n-1}\{\xi(1+\Delta\xi/\xi)\}^{n-2} \cdots - \Delta a_{2}\{\xi(1+\Delta\xi/\xi)\} - \Delta a_{1}
\end{aligned}
\tag{2-6}
$$

となる．ここで，$(1+\delta)^{m} = 1+m\delta$ の関係を代入する($\delta \ll 1$)．さらに(2-6)式を展開すると，

$$
\begin{aligned}
f'(\xi)\Delta\xi = {} & -\Delta a_{n}\xi^{n-1} - \Delta a_{n-1}\xi^{n-2} \cdots - \Delta a_{2}\xi - \Delta a_{1} - \Delta a_{n}\xi^{n-1}(n-1)(\Delta\xi/\xi) - \Delta a_{n-1}\xi^{n-2} \\
& (n-2)(\Delta\xi/\xi) \cdots - \Delta a_{2}\xi(\Delta\xi/\xi) - \Delta a_{1}
\end{aligned}
\tag{2-7}
$$

となる．ここで，各ξに対して，$\Delta\xi$が非常に小さいと($\xi \gg \Delta\xi$)仮定すれば，

$$
f'(\xi)\Delta\xi = -\Delta a_{n}\xi^{n-1} - \Delta a_{n-1}\xi^{n-2} \cdots - \Delta a_{2}\xi - \Delta a_{1} \tag{2-8}
$$

であるから，近似的に，

$$
\Delta\xi = (-\Delta a_{n}\xi^{n-1} - \Delta a_{n-1}\xi^{n-2} \cdots - \Delta a_{2}\xi - \Delta a_{1})/f'(\xi) \tag{2-9}
$$

となる．ここで次のことがわかる．

(1)計算機に多項式の係数を入力した場合，その誤差によって生じる根の誤差は近似的には各係数の入力誤差，根自身の大きさ，$f'(\xi)$ の３要素によって決定される．従って，係数入力時にすでに入力された係数を使用して種々の反復数値計算を実行しても，それらの方法における最小誤差は入力時に決定されてしまう．

(2)(1)で述べた誤差を改善するためには，$f'(\xi) \neq 0$の時，Δa_{n}，Δa_{n-1}，…，Δa_{2}，Δa_{1} ，およびξの値がすべて0に近づくこととなる．

３，例題

発表時に説明．

４，おわりに

多項式の根を求める時，その係数が入力され誤差を生じる．そのデータを基としてニュートン法，BIRGE-VIETA法などが実行される．本稿では，入力された係数誤差の影響を一度求められた根を利用し，根の誤差に影響しないようにするための理論的，技術的改善法を提案した．

５，謝辞

本研究にあたり，理論的問題で細かい部分にまで御指導いただいた，千葉大学美多勉教授，並びに本学教授岡本茂氏に感謝いたします．

６，参考文献

(1)T.R.ﾏｯｶｰﾗ著，三浦功，田尾陽一共訳:計算機のための数値計算法概論，ｻｲｴﾝｽ社，P82-93，1972年
(2)牧乃内三郎，鳥居達生著:数値解析，ｵｰﾑ社，P77-83，P89-90，1988年
(3)伊理正夫著:数値計算，朝倉書店，P129-132，1981年
(4)田口功:誤差限界式を用いた多項式の数値計算における根の反復誤差改善法，1-131，第49回(平成6年後期)講演論文集，情報処理学会，1994年
(5)川上一郎著:数値計算，岩波書店，P14-16，1989年
(6)一松信著:数値解析，朝倉書店，P51-56，1982年