6P－6

ウォッチドッグプロセッサをもつフォールトトレラントシステムの信頼性解析†

今泉充啓††　安井一民††　中川覃夫††

愛知工業大学

1. はじめに

マイクロプロセッサの動作状態を監視する一方法として，比較的安価なウォッチドッグタイマが数多く使用されている．ウォッチドッグプロセッサ (watchdog processor : WDP) は，このウォッチドッグタイマの機能を拡張したものである．すなわち，WDP は主プロセッサ (MPu) の処理プロセスをオンラインで監視することによって，システムレベルの誤り検出を行う簡単かつ小規模な副プロセッサである [1]．

ここでは，n 個の WDP をもつシステムをモデル化し，MPu の動作障害発生に至るまでの信頼度の評価や，期待費用を最小にする最適な WDP の個数，およびシステム信頼性を向上させるための WDP の機能・性能等に関して種々議論する．

2. モデルと動作障害発生までの平均時間

(1) MPu は，ハードウェア障害やメモリアクセスミス等により，平均 $1/\lambda$ をもつ確率分布 $F(t)$ に従って異常状態になる．(i) MPu の異常は，監視用の WDP によりカバレッジ p $(0 < p < 1)$ で検出され，システムリセットによって初期状態へ復帰する．(ii) システムリセットに要する時間は，便宜上無視できるものと仮定する．

(2) WDP は n 個の待機冗長構成とし，常時は1個の WDP が MPu を監視する．(i) WDP は自己のハードウェア障害等により，指数分布 $(1-e^{-\alpha t})$ に従って異常状態になる．この場合，MPu の異常は検出できない．(ii) WDP は自己検査機能をもち，自己の異常状態を確率 θ で検出し，待機中の WDP に自動的に切替わり，MPu をリセットして監視を再開する．この一連の自動切替え処理は，指数分布 $(1-e^{-\beta t})$ に従って行われる．(iii) 待機中の WDP には，異常は発生しないものと仮定する．

(3) MPu の異常を WDP が検出できない場合，あるいは，MPu が異常状態となったとき WDP に異常が発生中または切替え中の場合，MPu は動作障害に至るものとする．

以上のような仮定のもとで，MPu が動作を開始した後，障害発生に至るまでの平均時間を解析的に求める．まず，システムの各状態を次のように定義する．

状態 i : i 個目の WDP の異常発生
$(i = 0, 1, \cdots, n)$,

状態 F : MPu の動作障害発生．

システムの状態を上のように定義すると，各状態は状態 F を吸収状態にもつマルコフ再生過程を形成する．よって，各状態間の推移確率時間分布を $Q_{i,j}(t)$ $(i = 0, 1, \cdots, n; j = 0, 1, \cdots, n, F)$ とすると，次式を得る．

$$Q_{i,i}(t) = p \int_0^t e^{-\alpha t} dF(t), \qquad (1)$$

$$Q_{i,i+1}(t) = \left[\sum_{j=1}^{\infty} \{Q_{i,i}(t)\}^{(j-1)}\right] * \left[\int_0^t \frac{\alpha\beta\theta}{\alpha-\beta} \times (e^{-\beta t} - e^{-\alpha t})\bar{F}(t)dt\right], \qquad (2)$$

$$Q_{i,F}(s) = \left[\sum_{j=1}^{\infty} \{Q_{i,i}(t)\}^{(j-1)}\right] * \left[(1-p) \times \int_0^t e^{-\alpha t} dF(t) + (1-\theta)\right.$$

†Reliability Analysis of a Fault-Tolerant System with Watchdog Processor

††Mitsuhiro Imaizumi, Kazumi Yasui and Toshio Nakagawa, Aichi Institute of Technology

$$\times \int_0^t (1-e^{-\alpha t})dF(t) + \int_0^t \frac{\alpha\theta}{\alpha-\beta} \times (e^{-\beta t}-e^{-\alpha t})dF(t)\Big], \quad (3)$$

$$Q_{n,F}(t) = \Big[\sum_{j=1}^{\infty}\{Q_{i,i}(t)\}^{(j-1)}\Big] * \Big[(1-p)\int_0^t e^{-\alpha t}dF(t) + \int_0^t (1-e^{-\alpha t})dF(t)\Big]. \quad (4)$$

ここで，$\bar{F}(t) \equiv 1-F(t)$，$*$ は分布関数の畳込みを表し，$\{Q_{i,i}(t)\}^{(j)}$ は分布 $Q_{i,i}(t)$ の j 重畳込みを表す．

さて，一般に $\Phi(t)$ のラプラス・スチルチェス変換を $\phi(s) \equiv \int_0^\infty e^{-st}d\Phi(t)$ と定義し，$\bar{\phi}(s) \equiv 1-\phi(s)$ とする．MPu が動作を開始してから，障害発性に至るまでの経過時間分布を $H_{0,F}^{(n)}(t)$ とおくと，その平均時間 $\ell(n)$ は，$\ell(n) \equiv \lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}[-h_{0,F}^{(n)}(s)]$ より，次のように求めることができる．

$$\ell(n) = \frac{1}{1-pf(\alpha)}\sum_{j=1}^{n}\Big[\frac{\theta}{\alpha-\beta} \times \frac{\alpha\bar{f}(\beta)-\beta\bar{f}(\alpha)}{1-pf(\alpha)}\Big]^{j-1} \times \Big[\frac{\theta}{\alpha-\beta}\Big[\frac{\alpha\bar{f}(\beta)}{\beta}-\frac{\beta\bar{f}(\alpha)}{\alpha}\Big] + \frac{1}{\lambda}(1-\theta)\Big] + \frac{1}{\lambda}\Big[\frac{\theta}{\alpha-\beta} \times \frac{\alpha\bar{f}(\beta)-\beta\bar{f}(\alpha)}{1-pf(\alpha)}\Big]^{n}. \quad (5)$$

3. 信頼度に関する解析

MPu が時刻 t まで動作障害に至らない確率を $R_n(t)$ とし，$R_n(t) \equiv 1-H_{0,F}^{(n)}(t)$ と定義する．ここで，MPu の異常状態発生時間分布を $F(t) = 1-e^{-\lambda t}$ と仮定すると，$R_0(t) = e^{-\lambda t}$，

$$R_1(t) \equiv e^{-\lambda t} + \frac{\lambda p}{\alpha-\lambda p}(e^{-\lambda t}-e^{-xt}) + (E_1 t+E_2)e^{-xt} + E_3 e^{-yt} + E_4 e^{-\lambda t},$$

となり，一般に，$R_n(t)$ $(n=2,3,\cdots)$ は次式で表すことができる．すなわち，$h_{0,F}^{(n)}(s)$ を順次ラプラス逆変換することにより，係数 E_j $(j=1,2,\cdots,2n+2)$ を求めることができる．

$$R_n(t) \equiv R_{n-1}(t) + \sum_{j=0}^{n}\frac{E_{j+1}}{(n-j)!}t^{n-j}e^{-xt} + \sum_{j=0}^{n-1}\frac{E_{n+j+2}}{(n-j-1)!}t^{n-j-1}e^{-yt} + E_{2n+2}e^{-\lambda t}. \quad (6)$$

ここで，$x \equiv \alpha+\lambda(1-p)$, $y \equiv \beta+\lambda$ とおく．

4. 期待費用を最小にする最適方策

1 個当たりの WDP の費用を c_1，MPu の動作障害に伴う損失費用を c_2 とおき，システムの単位時間当たりの期待費用 $C(n)$ を，

$$C(n) \equiv \frac{nc_1+c_2}{\ell} = \frac{[1-pf(\alpha)](nc_1+c_2)}{\left(\frac{1-A^n}{1-A}B+\frac{1}{\lambda}A^n\right)}, \quad (7)$$

と定義する．ここで，

$$A \equiv \frac{\theta}{\alpha-\beta}\Big[\frac{\alpha\bar{f}(\beta)-\beta\bar{f}(\alpha)}{1-pf(\alpha)}\Big],$$

$$B \equiv \frac{\theta}{\alpha-\beta}\Big[\frac{\alpha\bar{f}(\beta)}{\beta}-\frac{\beta\bar{f}(\alpha)}{\alpha}\Big]+\frac{1}{\lambda}(1-\theta),$$

とおく．そのとき，期待費用 $C(n)$ を最小にする最適方策を，次のように求めることができる．ここで，$D \equiv (1-A)/[\lambda B-(1-A)]$ とおく．

(i) もし，$\lambda B-(1-A) > c_1/c_2$ ならば，$C(n)$ を最小にする n^* は，次式を満たす最小の整数 n として唯一求められる．

$$\frac{1-A^n+D}{A^n(1-A)}-n \geq \frac{c_2}{c_1}. \quad (8)$$

(ii) もし，$\lambda B-(1-A) \leq c_1/c_2$ ならば，$n^*=0$ であり，WDP は使用しない方がよい．

参考文献

[1] 南谷　崇：フォールトトレラントコンピュータ，p.272，オーム社 (1991).