最小被覆問題とその緩和問題の解のサイズの差

吉田 清明[†] 朱雀 保正[†]

代表的な NP 完全問題の 1 つに最小被覆問題がある．最小被覆問題は，行列 $T=[t_{ij}]$, $t_{ij}\in\{1,0\}$ からいくつかの列ベクトルを選んで和をとるとき，和の要素がすべて 1 以上となるような最小数の列を見出す問題として表現できる．またその緩和問題とは，列の和を列の荷重和に置き換え，荷重 x_j を $0\le x_j\le 1$ を満たす実数とした問題である．本稿では，任意の n 変数（n 列）最小被覆問題とその緩和問題の解のサイズの差 k に関して $0\le k\le(n+1)-2\sqrt{n}$ が成り立つことを示す．

The Maximum Difference between the Solution of the Minimum Cover Problem and Its Relaxation Problem

Kiyoaki Yoshida[†] and Yasumasa Sujaku[†]

The minimum cover problem is a well-known NP complete problem that is expressible using a matrix $T=[t_{ij}]$, $t_{ij}\in\{1,0\}$ and is used for finding a minimum number of column vectors which satisfy the conditon that any element of the sum of these column vectors is not less than one. The corresponding relaxation problem is defined by replacing the sum with the weighted sum of column vectors, where the weight x_j varies in a closed interval between 0 and 1. In this paper, we prove the relation $0\le k\le(n+1)-2\sqrt{n}$ where k is the maximum difference between the solution of the minimum cover problem and its relaxation problem, and n is the number of variables (column vectors).

1. はじめに

最小被覆問題[1),2)]は，行列 $T=[t_{ij}]$, $t_{ij}\in\{1,0\}$ からいくつかの列ベクトルを選んで和をとるとき，和の要素がすべて 1 以上となるような最小数の列を見出す問題として表現できる．最小被覆問題は代表的な NP 完全問題の 1 つであり，したがって，その多項式時間アルゴリズムの有無はいまだ未解決のままである．一方，上記問題で列の和を列の荷重和に置き換え，荷重 x_j を $0\le x_j\le 1$ を満たす実数とした問題（緩和問題[3)]）を，線形計画法を用いて解く方法（いわゆる緩和法）がよく知られている．線形計画法には楕円体法[4)]や内点法[5)]などの多項式時間アルゴリズムが存在するので，緩和法は最小被覆問題の解を高速に見積もる方法として有効である．しかしながら，緩和法で得られる解と最小被覆問題の解の差については，従来ほとんど知られていないようである．本稿では，任意の n 変数最小被覆問題とその緩和問題の解のサイズの差 k に関して $0\le k\le(n+1)-2\sqrt{n}$ が成り立つことを示す．

† 久留米工業大学工学部
Faculty of Engineering, Kurume Institute of Technology

2. 最小被覆問題

任意のベクトル

$$\boldsymbol{v}=[\ v_1,\dots,v_n\ ] \tag{1}$$

に対し，ノルムを

$$\|\ \boldsymbol{v}\ \|=\sum_{i=1}^{n}|\ v_i\ | \tag{2}$$

と定義する．特に $\boldsymbol{v}$ の要素がすべて 0 または 1 の場合は $\|\ \boldsymbol{v}\ \|$ は要素 1 の総数を表す．また，任意のベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ に関する不等式 $\boldsymbol{v}_1\ge\boldsymbol{v}_2$ は，すべての要素が不等式を満たすことを表すとする．要素がすべて 0 または 1 の次の行列

$$T=\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ t_{m1} & t_{m2} & \dots & t_{mn}\end{bmatrix} =\begin{bmatrix}\boldsymbol{r}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{r}_m\end{bmatrix}=[\ \boldsymbol{c}_1\dots\boldsymbol{c}_n\ ] \tag{3}$$

および次のベクトル

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\ \boldsymbol{1}=\left.\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}\right\}m\text{ 個} \tag{4}$$

を用いて最小被覆問題とその緩和問題は次のように定義される．

最小被覆問題：不等式

$$T\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{1} \tag{5}$$

を満たす $\boldsymbol{x}$ について

$$\min \| \boldsymbol{x} \| \quad (=\ \text{解のサイズ}) \tag{6}$$

を求めよ．ただし，$\boldsymbol{x}$ の要素はすべて 0 または 1 とする．

緩和問題：式 (5) を満たす $\boldsymbol{x}$ について式 (6) の最小値を求めよ．ただし，$\boldsymbol{x}$ の要素は

$$0 \leq x_j \leq 1 \quad (j=1,\ldots,n) \tag{7}$$

を満たす実数とする．

3. 行列 T の圧縮操作

ある性質を保ちながら行列 T の行数 m や列数 n を減らすことを一般に行列 T を圧縮するという．本章では，最小被覆問題とその緩和問題の解のサイズ（式 (6) の最小値）を変えないで，行列 T を圧縮する方法を示す．この圧縮操作は論理関数を簡単化するクワイン・マクラスキーの方法[6)~8)] の中で行われる圧縮操作と形式上まったく同じである．この操作のうち行の圧縮は，本稿の主な結果の 1 つである定理 5 の成立に不可欠な操作である．

3.1 行の包含関係

すべての j について

$$t_{lj}=0 \rightarrow t_{kj}=0 \tag{8}$$

が成り立つならば，k 行は l 行を包含するといい，

$$\boldsymbol{r}_k \supseteq \boldsymbol{r}_l \tag{9}$$

と書く．

3.2 行の圧縮

行列 T において，$\boldsymbol{r}_k \supseteq \boldsymbol{r}_l$ のとき，$\boldsymbol{r}_l$ を行列から取り除くことを行の圧縮という．行列 T に対して行の圧縮を繰り返すと，それ以上圧縮できない行列が得られる．この行列を RT と書き，R を**行圧縮作用素**という．このとき次の補題 1，補題 2 が成り立つ．

補題 1　行列 RT は，一意に定まる（証明省略）．

補題 2　行の圧縮操作を行っても，最小被覆問題およびその緩和問題の解のサイズは変わらない．

証明： $\boldsymbol{r}_k \supseteq \boldsymbol{r}_l$ とすると式 (4) のベクトルを $\boldsymbol{x}$ を用いて

$$\boldsymbol{r}_k\boldsymbol{x} \geq 1 \text{ ならば } \boldsymbol{r}_l\boldsymbol{x} \geq 1 \tag{10}$$

が成り立つ．よって $\boldsymbol{r}_l$ を省いても $T\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{1}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ の集合は変わらない．　□

3.3 列の包含関係

すべての i について

$$t_{il}=1 \rightarrow t_{ik}=1 \tag{11}$$

が成り立つならば，k 列は l 列を包含するといい，

$$\boldsymbol{c}_k \supseteq \boldsymbol{c}_l \tag{12}$$

と書く．

3.4 列の圧縮

行列 T において，$\boldsymbol{c}_k \supseteq \boldsymbol{c}_l$ のとき，$\boldsymbol{c}_l$ を行列から取り除くことを列の圧縮という．行列 T に対して列の圧縮を繰り返すと，それ以上圧縮できない行列が得られる．この行列を TC と書き，C を**列圧縮作用素**という．このとき次の補題 3，補題 4 が成り立つ．

補題 3　行列 TC は，一意に定まる（証明省略）．

補題 4　列の圧縮操作を行っても，最小被覆問題およびその緩和問題の解のサイズは変わらない．

証明： 式 (6) の最小被覆問題の解ベクトル $\boldsymbol{x}$ を $\hat{\boldsymbol{x}}$ と書くと

$$T\hat{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{1}. \tag{13}$$

もし $\boldsymbol{c}_k \supseteq \boldsymbol{c}_l$ のとき，$\hat{\boldsymbol{x}}$ の要素 $\hat{x}_l \neq 0$ とすると

$$\begin{aligned} T\hat{\boldsymbol{x}} &= \sum_j \hat{x}_j \boldsymbol{c}_j \\ &= \sum_{j \neq l} \hat{x}_j \boldsymbol{c}_j + \hat{x}_l \boldsymbol{c}_l. \end{aligned} \tag{14}$$

ところが $\boldsymbol{c}_k \supseteq \boldsymbol{c}_l$ だから

$$\hat{x}_l \boldsymbol{c}_l \leq \hat{x}_l \boldsymbol{c}_k. \tag{15}$$

よって

$$\begin{aligned} T\hat{\boldsymbol{x}} &\leq \sum_{j \neq l} \hat{x}_j \boldsymbol{c}_j + \hat{x}_l \boldsymbol{c}_k \\ &= \sum_{j \neq k,l} \hat{x}_j \boldsymbol{c}_j + (\hat{x}_k + \hat{x}_l)\boldsymbol{c}_k. \end{aligned} \tag{16}$$

すなわち，$\hat{x}_l \neq 0$ のとき $\hat{x}_k$ を新たに $\hat{x}_k + \hat{x}_l$ に増やして $\hat{x}_l = 0$ としても式 (5) の条件を満たすので，$\boldsymbol{c}_l$ を省いても解のサイズは大きくならない．　□

3.5 行列の圧縮

作用素 R と C は行列 T に繰り返し適用することができる．この繰返しは，次の 2 つの型に分類できる．

［I 型］行列 T にまず R を適用するもの：

$$R_1^{\mathrm{I}}T,\ (R_1^{\mathrm{I}}T)C_1^{\mathrm{I}},\ R_2^{\mathrm{I}}((R_1^{\mathrm{I}}T)C_1^{\mathrm{I}}),\ \cdots \tag{17}$$

［II 型］行列 T にまず C を適用するもの：

$$TC_1^{\mathrm{II}},\ R_1^{\mathrm{II}}(TC_1^{\mathrm{II}}),\ (R_1^{\mathrm{II}}(TC_1^{\mathrm{II}}))C_2^{\mathrm{II}},\ \cdots. \tag{18}$$

いずれの型も，作用素を繰り返し適用すると行列 T は圧縮されていくが，ある回数適用するとそれ以上は圧縮されなくなる．このとき次の定理 1 が成り立つ．

定理 1　I 型の圧縮を繰り返し，最後に得られる行

列を $T_{\rm I}$，II 型の圧縮を繰り返して得られる行列を $T_{\rm II}$ とする．このとき

$$T_{\rm I} = T_{\rm II} \tag{19}$$

が成り立つ．ただし，圧縮の途中で得られる行列において，もしある行 k 行と他のある行 l 行とが等しくなった場合には，k 行と l 行は等価であるとし，若い番号の行を残し，他を行列から取り除く，と約束する．列の場合も同様に考える（証明省略）．

3.6 行圧縮された行列の性質

3.2 節に述べた行圧縮を施した行列に関して次の定理 2 が成り立つ．

定理 2 式 (6) の最小被覆問題の解のサイズが

$$\min \| \boldsymbol{x} \| = \alpha + 1 \tag{20}$$

であるとし，T は行の圧縮操作がなされているとする．このとき，行列 T の任意の行 $\boldsymbol{r}_i$ は，次式

$$\| \boldsymbol{r}_i \| \le n - \alpha \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{21}$$

を満たす．

証明： もし，ある行ベクトル$\boldsymbol{r}_i$ が

$$\| \boldsymbol{r}_i \| > n - \alpha \tag{22}$$

と仮定すると，$\boldsymbol{r}_i$ の次数は n だから要素 0 の数は α より少ない．そこで，新しく行ベクトル $\boldsymbol{f}_i$ を次のように作る．まず，

$$\boldsymbol{r}_i\text{の要素が 0 のところでは}\boldsymbol{f}_i\text{の要素は 1} \tag{23}$$

とする．これだけでは 1 の総数は α より少ないので，適当に 1 の要素を増やして，1 の総数を α とし，残りの要素を 0 とする．こうして作られた $\boldsymbol{f}_i$ に対して

$$\boldsymbol{r}_i \boldsymbol{f}_i{}^t \ge 1 \tag{24}$$

が成り立つ．ただし肩符 t は転置を表す．しかし解のサイズは α+1 だから，いずれかの行，たとえば k 行に対して

$$\boldsymbol{r}_k \boldsymbol{f}_i{}^t = 0 \tag{25}$$

となるはずである（そうでなければ解のサイズは α 以下となってしまう）．上式は

$$\boldsymbol{f}_i\text{の要素が 1 のところで}\boldsymbol{r}_k\text{の要素は 0} \tag{26}$$

であることを示している．式 (23)，(26) から容易に，$\boldsymbol{r}_i$ の要素が 0 のところで $\boldsymbol{r}_k$ の要素は 0 であることが分かる．すなわち

$$\boldsymbol{r}_k \supseteq \boldsymbol{r}_i \tag{27}$$

が成り立つ．よって行の圧縮操作により，$\boldsymbol{r}_i$ は取り除かれる． □

4. 最大行列

定理 2 の条件を満足する行列 T は，式 (21) を満たす．すなわち，$\boldsymbol{r}_i$ の 1 の総数は $n-\alpha$ 以下である．そこで，$\boldsymbol{r}_i$ の 0 の要素を 1 に変えて，1 の総数が $n-\alpha$ に等しくなるようにする．こうして生成される行ベクトルの総数は

$$l = {}_{n-\|\boldsymbol{r}_i\|}\mathrm{C}_\alpha \tag{28}$$

であり，これらを $\boldsymbol{e}_{ij}$ $(j = 1, \ldots, l)$ とする．行列 T の $\boldsymbol{r}_i$ を $\boldsymbol{e}_{ij}$ $(j = 1, \ldots, l)$ で置き換えた行列 $T^{(i)}$ を

$$T^{(i)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_{i-1} \\ \boldsymbol{e}_{i1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_{il} \\ \boldsymbol{r}_{i+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_m \end{bmatrix} \tag{29}$$

とすると次の補題 5，補題 6 が成り立つ．

補題 5 T と $T^{(i)}$ の最小被覆問題の解のサイズは等しい．

証明： $\boldsymbol{r}_i \supseteq \boldsymbol{e}_{ij}$ だから，$T\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{1}$ ならば $T^{(i)}\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{1}$ である．すなわち，$T^{(i)}$ の最小被覆問題の解のサイズは，T のそれ（α+1）以下である．また，$\| \boldsymbol{x} \| = \alpha$ であるような $\boldsymbol{x}$ に対して，$\boldsymbol{r}_i\boldsymbol{x} = 0$ となったとすると，$\boldsymbol{e}_{ij}$ $(j = 1, \ldots, l)$ の作り方から $\boldsymbol{e}_{ij}\boldsymbol{x} = 0$ となる $\boldsymbol{e}_{ij}$ が 1 つ存在することが容易に分かる．したがって，$T^{(i)}$ の最小被覆問題の解のサイズは α+1 以上である．よって補題 5 が成り立つ． □

補題 6 緩和問題の場合は，$T^{(i)}$ の解のサイズは，T のそれ以下である．

証明： 式 (7) を満たす $\boldsymbol{x}$ を用いて

$$\boldsymbol{r}_i\boldsymbol{x} \ge 1 \text{ ならば } \boldsymbol{e}_{ij}\boldsymbol{x} \ge 1 \tag{30}$$

だから，$\boldsymbol{r}_i\boldsymbol{x} \ge 1$ を満たす $\boldsymbol{x}$ の集合を $P\boldsymbol{r}_i$ とし，$\boldsymbol{e}_{ij}\boldsymbol{x} \ge 1$ を満たす $\boldsymbol{x}$ の集合を $P\boldsymbol{e}_{ij}$ とすると

$$P\boldsymbol{r}_i \subseteq P\boldsymbol{e}_{ij} \quad (j = 1, \ldots, l) \tag{31}$$

すなわち

$$P\boldsymbol{r}_i \subseteq P\boldsymbol{e}_{i1} \cap P\boldsymbol{e}_{i2} \cap \cdots \cap P\boldsymbol{e}_{il} \tag{32}$$

が成り立つ．すなわち $T\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{1}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ の解空間は，$T^{(i)}\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{1}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ の解空間に含まれる．よって，補題 6 が成り立つ． □

補題 6 によれば，T の任意の行 $\boldsymbol{r}_i$ を $\{\boldsymbol{e}_{i1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{il}\}$ で置き換えると緩和問題の解のサイズは減少する．そこで，すべての行を同様に置き換えた行列を T' とすると，T' には一般にまったく同じ行が存在する．同じ行は 1 つを残して，他を取り除いても式 (5) の制約領域は変わらないので，1 つだけを残して得られる行列を $T_{\max}$ と書いて，これを**最大行列**（maximum matrix）ということにする．$T_{\max}$ に関して次の定理

3が成り立つ．

定理 3 最大行列 $T_{\max}$ は $n-\alpha$ 個の要素が1で他が0であるような行ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ のすべてを含んでいる．

証明： もし，ある行ベクトル $\boldsymbol{e}_k$ を含まないとすると

$$\boldsymbol{f}_k = \overline{\boldsymbol{e}}_k \tag{33}$$

を満たす行ベクトル $\boldsymbol{f}_k$ を作る．ここで記号 $^{-}$ は，0と1の反転を意味する．すなわち，$\boldsymbol{f}_k$ は，$\boldsymbol{e}_k$ の要素が0のところでは1となり，1のところは0となっている．$\|\boldsymbol{f}_k\| = \alpha$ であり $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{f}_k{}^t \geq 1$ $(i \neq k)$ となるので $T_{\max}\boldsymbol{f}_k{}^t \geq \boldsymbol{1}$ が成り立ち，最小被覆問題の解のサイズが α となり，式(20)を参照すると補題5に矛盾する． □

以上をまとめると，最大行列は定理3の $\boldsymbol{e}_i$ を用いて

$$T_{\max} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_M \end{bmatrix} \tag{34}$$

と書ける．ただし $M = {}_n\mathrm{C}_\alpha$ である．$T_{\max}$ に関して次の補題7と定理4，定理5が成り立つ．

補題 7 $T_{\max}$ の最小被覆問題の解のサイズは $\alpha+1$ である（式(20)と補題5による）．

定理 4 $T_{\max}$ の緩和問題の解のサイズは

$$\min \|\boldsymbol{x}\| = \frac{n}{n-\alpha} \tag{35}$$

である．

証明： 制約条件 $T_{\max}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{1}$ の M 個の不等式をすべて加えることにより $\|\boldsymbol{x}\| \geq n/(n-\alpha)$ が得られる．ところが，$\boldsymbol{x}$ のすべての要素を同じ値 $x_i = 1/(n-\alpha)$ にすると $T_{\max}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{1}$ を満たし，かつ最小値 $\|\boldsymbol{x}\| = n/(n-\alpha)$ が得られる． □

定理 5 $T_{\max}$ は最小被覆問題の解のサイズが $\alpha+1$ である任意の行列 T の中で緩和問題の解のサイズが最小であり，T に行の圧縮を行った RT の中で行数が最大である．

証明： 前半は，定理2および補題5，6により明らかである．後半を示すために，$T_{\max}$ に任意の行 $\boldsymbol{r}_0$ を加える．$\|\boldsymbol{r}_0\| = n-\alpha$ であれば，$T_{\max}$ の行のどれかと一致するので，行の圧縮により省かれる．$\|\boldsymbol{r}_0\| < n-\alpha$ であれば $T_{\max}$ の2つ以上の行 $\boldsymbol{e}_k$ が $\boldsymbol{e}_k \subseteq \boldsymbol{r}_0$ となり省かれてしまうので行数が減少し，緩和問題の解のサイズは等しいかまたは増加する．$\|\boldsymbol{r}_0\| > n-\alpha$ であれば $T_{\max}$ のいずれかの行 $\boldsymbol{e}_k$ に対し $\boldsymbol{e}_k \supset \boldsymbol{r}_0$ となるので行の圧縮により省かれる． □

補題7，定理4，定理5よりただちに次の系1が得られる．

系 1 任意の n 変数最小被覆問題 T の解のサイズが $\alpha+1$ 以上のとき，緩和問題の解のサイズは $n/(n-\alpha)$ より小さな値になりえない．

また，系1の対偶より，次の系2が得られる．

系 2 任意の n 変数緩和問題の解のサイズが $n/(n-\alpha)$ より小さいとき，最小被覆問題の解のサイズは α 以下である．

5. 最小被覆問題と緩和問題の解のサイズの差

最大行列 $T_{\max}$ の最小被覆問題と緩和問題の解のサイズの差を k (≥ 0) とすると，k は補題7と定理4により

$$k = (\alpha+1) - \frac{n}{n-\alpha} \tag{36}$$

と表される．式(36)を α について整理すると次式

$$\alpha^2 - (n+k-1)\alpha + kn = 0 \tag{37}$$

が得られる．α は正整数であるから実数である．したがって，式(37)の判別式より

$$(n+k-1)^2 - 4kn \geq 0. \tag{38}$$

これを k について整理すると

$$k^2 - 2(n+1)k + (n-1)^2 \geq 0. \tag{39}$$

上式が成り立つ k の範囲を求めると

$$k \geq (n+1) + 2\sqrt{n}, \tag{40}$$

$$k \leq (n+1) - 2\sqrt{n} \tag{41}$$

が得られるが，式(40)は $k > n$ となり不合理．したがって，式(41)のみが成り立つ．以上をまとめると次の補題8が得られる．

補題 8 $T_{\max}$ の最小被覆問題とその緩和問題の解のサイズの差 k について

$$0 \leq k \leq (n+1) - 2\sqrt{n} \tag{42}$$

が成り立つ．

定理5と補題8より次の定理6が成り立つ．

定理 6 任意の n 変数最小被覆問題 T とその緩和問題の解のサイズの差 k に関して

$$0 \leq k \leq (n+1) - 2\sqrt{n} \tag{43}$$

が成り立つ．

式(37)に $k = (n+1) - 2\sqrt{n}$ を代入し，α について解くと

$$\alpha = n - \sqrt{n} \tag{44}$$

が得られる．α は正の整数だから，n がある整数の2乗のときは式(41)において等号が成り立つ．すなわち，次の系3が成り立つ．

系 3 n がある整数の2乗のときには，定理6の差 k が最大値 $k = (n+1) - 2\sqrt{n}$ となる最小被覆問題とその緩和問題がつねに存在する．それ以外のときには，式(44)の α をはさむ2つの整数を式(36)の α

に代入したとき，値の大きい方が k の最大値となる．

6. 最小被覆問題の部分問題への分割

与えられた n 変数最小被覆問題 T に行の入れ替えと列の入れ替えを行うと，いくつかの部分問題に分割できる場合がある．すなわち，細胞行列 T_i $(i=1,\ldots,I)$ を用いて

$$T = \mathrm{diag}\,[T_1,\cdots,T_i,\cdots,T_I] \tag{45}$$

とできる場合がある．このとき，次の 2 つの定理が成り立つ．

定理 7　T，T_i の緩和問題の解のサイズを各々 $\min T$，$\min T_i$ と書くとき

$$\min T = \sum_{i=1}^{I} \min T_i \tag{46}$$

が成り立つ（証明省略）．

定理 8　任意の n 変数最小被覆問題 T とその緩和問題の解のサイズの差 k は式 (43) の右辺を上界とし，また，T を分割して得られた n_i 変数最小被覆問題 T_i（ただし i は 1 から I までの正整数）とその緩和問題の解のサイズの差 k_i は同様に $(n_i+1)-2\sqrt{n_i}$ を上界とする．これらの上界の間に次の関係

$$(n+1)-2\sqrt{n} \geq \sum_{i=1}^{I}\{(n_i+1)-2\sqrt{n_i}\} \tag{47}$$

が成り立つ．

証明： 式 (47) の右辺をまとめると

$$\sum_{i=1}^{I} n_i + I - 2\sum_{i=1}^{I}\sqrt{n_i} \tag{48}$$

となる．一方，$n=\sum_{i=1}^{I} n_i$ を用いて，式 (47) の左辺は

$$\sum_{i=1}^{I} n_i + 1 - 2\sqrt{\sum_{i=1}^{I} n_i} \tag{49}$$

となる．したがって，式 (47) の

$$\begin{aligned}
&(\text{左辺}) - (\text{右辺})\\
&\quad = 1 - I + 2\left(\sum_{i=1}^{I}\sqrt{n_i} - \sqrt{\sum_{i=1}^{I} n_i}\right)\\
&\quad \geq 0
\end{aligned} \tag{50}$$

を証明すればよい．ここでは数学的帰納法を用いる．

1) $I=1$ のときは明らかに式 (50) が成り立つ．

2) $I=k$ のときに式 (50) が成り立つと仮定する．式 (50) で $I=k+1$ とおいた式を，a，b がともに 1 以上で成り立つ次の公式

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} - \frac{1}{2} \tag{51}$$

を用いて変形すると

$$\begin{aligned}
&1-(k+1)+2\left(\sum_{i=1}^{k+1}\sqrt{n_i} - \sqrt{\sum_{i=1}^{k+1} n_i}\right)\\
&= 1-(k+1)+2\left\{\sum_{i=1}^{k}\sqrt{n_i} + \sqrt{n_{k+1}} \right.\\
&\qquad \left. - \sqrt{\sum_{i=1}^{k} n_i + n_{k+1}}\right\}\\
&\geq 1-(k+1)+2\left\{\sum_{i=1}^{k}\sqrt{n_i} + \sqrt{n_{k+1}} \right.\\
&\qquad \left. - \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{k} n_i} + \sqrt{n_{k+1}} - \frac{1}{2}\right)\right\}\\
&= 1-k+2\left(\sum_{i=1}^{k}\sqrt{n_i} - \sqrt{\sum_{i=1}^{k} n_i}\right)\\
&\geq 0
\end{aligned} \tag{52}$$

が得られる．上式の最後の不等式は 2) の仮定より成り立つ．　□

定理 8 によれば，与えられた任意の n 変数最小被覆問題 T がいくつかの部分問題（細胞行列）に分割可能な場合には，分割することによって緩和問題を用いて最小被覆問題の解の存在範囲を見積もるときの見積り精度が向上することが分かる．

7. おわりに

任意の n 変数最小被覆問題 T とその緩和問題の解のサイズの差 k に関して $0 \leq k \leq (n+1)-2\sqrt{n}$ が成り立つことを示した．よって，任意の 3 変数以下の最小被覆問題においては，k が 1 以上となる問題は存在しない．また，任意の 4 変数最小被覆問題において，k は 1 以下であり，k が 1 になるのは式 (44) により $\alpha=2$ の場合で，最小被覆問題の解のサイズは 3，その最大行列は定理 3 より

$$T_{\max} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{53}$$

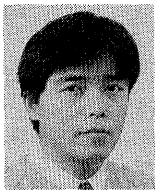
となる．この $T_{\max}$ の緩和問題の解のサイズは定理 4

により 2 である．

参 考 文 献

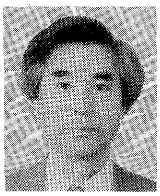
1) Garey, M. and Jonson, D.: *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, Freeman, W.H. (Ed.) (1979).
2) Cormen, T.H., Leiserson, C.E., and Rivest, R.L.: *Introduction to Algorithms*, 15th printing, The MIT Press (1995).
3) H.P. ウィリアムス，前田英次郎（監訳），小林英三（訳）: 数理計画モデルの作成法，産業図書 (1995).
4) Khachiyan, L.G.: A Polynomial Algorithm in Linear Programming (English translation), *Soviet Mathematics Doklady*, Vol.20, pp.191–194 (1979).
5) Karmarkar, N.: A New Polynomial-time Algorithm for Linear Programming, *Combinatorica*, Vol.4, No.4, pp.373–395 (1984).
6) Quine, W.V.: The Problem of Simplifying Truth Functions, *The American Mathematical Monthly*, Vol.59, No.8, pp.521–531 (1952).
7) Quine, W.V.: A Way of Simplify Truth Functions, *The American Mathematical Monthly*, Vol.62, No.9, pp.627–631 (1955).
8) McCluskey, E.J.: Minimization of Boolean Functions, *The Bell System Technical Journal*, Vol.35, No.5, pp.1417–1444 (1956).

(平成 10 年 4 月 27 日受付)
(平成 11 年 2 月 8 日採録)



吉田 清明（正会員）

1985 年佐賀大学理工学部電子工学科卒業．1987 年同大学大学院修士課程修了．同年久留米工業大学工学部電子情報工学科助手，1990 年同講師．1997 年九州大学大学院システム情報科学研究科博士後期課程編入．システムレベルの故障診断に関する研究に従事．電子情報通信学会会員．



朱雀 保正

1967 年九州大学工学部電子工学科卒業．1972 年同大学大学院通信工学専攻博士課程退学．同年九州大学工学部助手．工学博士．大分大学を経て，1986 年久留米工業大学電子情報工学科教授．音声と聴覚，特に音声信号処理と聴覚神経系の生理モデルに興味を持つ．電子情報通信学会，日本音響学会各会員．