圏論的結合子の操作的意味について

3U－6

森彰　　松本吉弘

京都大学工学部

e-mail: {mori, yhm}@kuis.kyoto-u.ac.jp

1 はじめに

Curienは，カルテシアン閉圏(cartesian closed category，以下，CCCと略す)の定義における普遍写像性を，圏論的結合子と呼ばれる特別な射に関する等式に翻訳し，この等式を書き換え規則とみなすことで，関数型言語の操作的意味が圏論を通じて与えられることを示唆した[1]．特にCCCの圏論的結合子から型，すなわち定義域と値域に関する情報と，終対象に関する結合子を取り除いた代数系(C-モノイドと呼ばれる)を用いれば，型なしのラムダ計算を従来の項書換え系として扱うことができる．横内も独立して，型なしの場合に圏論的結合子の等式を書き換え規則として扱うことを提唱した[2]．しかし圏の射は $f: A \to B$ のように定義域 A と値域 B によって型付けられた存在であり，射の結合は一方の値域と他方の定義域が一致するような射の対に対してのみ部分的に定義される．個々の結合子についても，異なる対象の上で同様に作用し得るという多相的な性質を持っている．たとえ型なしのC-モノイドを扱うとしても，結合子に関する個々の等式がどのような計算的・意味論的性質に連係しているのかが明らかでないので，合流性や停止性といった項書換え系の性質を考察することが困難である[3]．本稿では，まずCCCのための圏論的結合子とその等式を随伴関手から直接導き出し，自由圏を生成する逐次式計算系を定義する．そしてこの体系におけるカット除去を圏論的結合子の操作的意味として用いることを提案する．

2 随伴関手と圏論的結合子

多くの圏構造が随伴関手によって定義されることが知られており，CCCも終対象，積，巾に対応した随伴関手を持った圏として定義できる．すなわち，圏 $\mathbf{C}$ がCCCであることは，以下の(右)随伴関手が存在することと同値である．

- 積関手 $\_\times\_ : \mathbf{C}\times\mathbf{C}\to\mathbf{C}$．これは対角関手 $\Delta:\mathbf{C}\to\mathbf{C}\times\mathbf{C}$ の右随伴関手であり，単因子は $\mathbf{dupl}_A : A \to A\times A$ (duplicator)，余単因子は $\mathbf{fst}_{A,B} : A\times B\to A$ (first projection) と $\mathbf{snd}_{A,B} : A\times B \to B$ (second projection) の対である．
- 巾乗関手 $A\supset\_ : \mathbf{C}\to\mathbf{C}$ (A は圏 $\mathbf{C}$ の任意の対象)．これは積関手が存在するときに定義できる右積関手 $\_\times A:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ の右随伴関手であり，単因子は $\mathbf{mark}_{A,B} : A\to(B\supset A\times B)$ (placemarker, A について自然)，余単因子は $\mathbf{app}_{A,B} : (A\supset B)\times A\to B$ (application, B について自然) である．
- 終対象関手 $! : \mathbf{1}\to\mathbf{C}$．これは定関手 $S:\mathbf{C}\to\mathbf{1}$ の右随伴関手であり，単因子は $\mathbf{kill}_A : A\to 1$ (killer)，余単因子は $\mathbf{id}_T : C\to T$ である．圏 $\mathbf{1}$ は唯一の対象 T と唯一の恒等射 $\mathbf{id}_T$ を持つ圏でり，圏 $\mathbf{C}$ の対象 $!(T)$ を $\mathbf{C}$ の終対象1とした．

圏論的結合子が，随伴関手に付随する自然変換である単因子と余単因子として得られるので，これにより圏論的結合子の多相性が説明される．またその等式は以下に示すように，圏公理，関手，自然変換の定義，および随伴関手の三角可換図から直接導かれる．

圏公理

$f;(g;h) = (f;g);h,$

$\mathbf{id};f = f,$

$f;\mathbf{id} = f.$

関手

$(f;h)\times(g;k) = f\times g;h\times k\cdots(*),$

$\mathbf{id}\times\mathbf{id} = \mathbf{id},$

$\mathbf{id}\supset(f;g) = \mathbf{id}\supset f;\mathbf{id}\supset g\cdots(*),$

$\mathbf{id}\supset\mathbf{id} = \mathbf{id}.$

自然変換

$f;\mathbf{dupl} = \mathbf{dupl};f\times f,$

$f\times g;\mathbf{fst} = \mathbf{fst};f,$

$f\times g;\mathbf{snd} = \mathbf{snd};g,$

$f;\mathbf{mark} = \mathbf{mark};\mathbf{id}\supset f\times\mathbf{id},$

$(\mathbf{id}\supset f)\times\mathbf{id};\mathbf{app} = \mathbf{app};f,$

On the Operational Semantics of Categorical Combinators
Akira MORI
Yoshihiro MATSUMOTO
Faculty of Engineering, Kyoto University

$f; \mathbf{kill} = \mathbf{kill}.$

随伴

$\mathbf{dupl}; \mathbf{fst} \times \mathbf{snd} = \mathbf{id},$

$\mathbf{dupl}; \mathbf{fst} = \mathbf{id},$

$\mathbf{dupl}; \mathbf{snd} = \mathbf{id},$

$\mathbf{mark}; \mathbf{id} \supset \mathbf{app} = \mathbf{id},$

$\mathbf{mark} \times \mathbf{id}; \mathbf{app} = \mathbf{id},$

$\mathbf{kill} = \mathbf{id}.$

この等式から合流性，停止性を持った完備な項書換え系を得るのは困難であるが，∗の印のついた等式を除けば完備化は容易である．この等式は代入と型の相互作用を規定した等式であり，書き換えの合流性と大きな関わりを持つ．

3 逐次式計算と自由圏

逐次式計算と自然演繹，型付きラムダ計算と自由圏の対応を利用して，証明図に沿って自由圏の正準な射が生成されるような体系を得ることができる．ただし厳密には，圏論的結合子の等式と，定義域と値域を考慮した等式推論によって帰納的に定義される最小の同値関係≡による同値類を考える必要がある．

公理: (A:atom)

$$A \xrightarrow{\mathbf{id}} A$$

カット:

$$\frac{E \xrightarrow{f} A \quad A \otimes D \xrightarrow{g} B}{E \otimes D \xrightarrow{f \otimes \mathbf{id}; g} B}\ (\mathrm{cut})$$

構造規則:

$$\frac{E \xrightarrow{f} B}{A \otimes E \xrightarrow{\mathbf{Snd}; f} B}\ (\mathrm{weakening})$$

$$\frac{(A \otimes A) \otimes E \xrightarrow{f} B}{A \otimes E \xrightarrow{\mathbf{Dupl} \otimes \mathbf{id}; f} B}\ (\mathrm{contraction})$$

論理規則:

$$\frac{A \otimes E \xrightarrow{f} C}{(A \times B) \otimes E \xrightarrow{\mathbf{fst} \otimes \mathbf{id}; f} C}\ (\times\mathrm{left1})$$

$$\frac{B \otimes E \xrightarrow{f} C}{(A \times B) \otimes E \xrightarrow{\mathbf{snd} \otimes \mathbf{id}; f} C}\ (\times\mathrm{left2})$$

$$\frac{E \xrightarrow{f} A \quad E \xrightarrow{g} B}{E \xrightarrow{\mathbf{dupl}; f \times g} A \times B}\ (\times\mathrm{right})$$

$$\frac{E \xrightarrow{f} A \quad B \otimes D \xrightarrow{g} C}{((A \supset B) \otimes E) \otimes D \xrightarrow{(\mathbf{id} \otimes f; \mathbf{app}) \otimes \mathbf{id}; g} C}\ (\supset\mathrm{left})$$

$$\frac{A \otimes B \xrightarrow{f} C}{A \xrightarrow{\mathbf{mark}; \mathbf{id} \supset f} B \supset C}\ (\supset\mathrm{right})$$

$$A \xrightarrow{\mathbf{kill}} 1 (1\mathrm{right})$$

4 カット除去と結合子の書き換え

前節の体系においてカット除去定理が成り立つ．すなわちどんな射 $A \xrightarrow{f} B$ に対しても，カットを用いずかつ $f \equiv g$ であるような射 $A \xrightarrow{g} B$ を与えるアルゴリズムが存在する．よって，このアルゴリズムを圏論的結合子の操作的意味をとして用いることができる．例えば次のカット除去は下の等式推論に対応する．

$$\frac{\dfrac{A \otimes B \xrightarrow{f} C}{A \xrightarrow{\mathbf{mark}; \mathbf{id} \supset f} B \supset C} \quad \dfrac{E \xrightarrow{g} B \quad C \xrightarrow{h} D}{(B \supset C) \otimes E \xrightarrow{\mathbf{id} \otimes g; \mathbf{app}; h} D}}{A \otimes E \xrightarrow{((\mathbf{mark}; \mathbf{id} \supset f) \otimes \mathbf{id}); (\mathbf{id} \otimes g; \mathbf{app}; h)} D}\ \mathrm{cut}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{E \xrightarrow{g} B \quad \dfrac{A \otimes B \xrightarrow{f} C \quad C \xrightarrow{h} D}{A \otimes B \xrightarrow{f; h} D}\ \mathrm{cut}}{A \otimes E \xrightarrow{(\mathbf{id} \otimes g); (f; h)} D}\ \mathrm{cut}$$

$$\begin{aligned}
&((\mathbf{mark}; \mathbf{id} \supset f) \otimes \mathbf{id}); (\mathbf{id} \otimes g; \mathbf{app}; h) \\
&\equiv \mathbf{id} \otimes g; \mathbf{mark} \otimes \mathbf{id}; (\mathbf{id} \supset f) \otimes \mathbf{id}; \mathbf{app}; h \\
&\equiv \mathbf{id} \otimes g; \mathbf{mark} \otimes \mathbf{id}; \mathbf{app}; f; h \equiv (\mathbf{id} \otimes g); (f; h).
\end{aligned}$$

参考文献

[1] Curien, P.-L.: *Categorical combinators, Sequential algorithms and Functional programming*, Pitman (1986).

[2] Yokouchi, H.: Relationship between λ-calculus and Rewriting Systems for Categorical Combinators, *Theor. Comput. Sci.*, Vol. 65, pp. 271–290 (1989).

[3] Hardin, T.: Confluence Results for the Pure Strong Categorical Logic CCL: λ-Calculi as Subsystems of CCL, *Theor. Comput. Sci.*, Vol. 65, pp. 291–341 (1989).