部分例示手法に基づいた定理自動証明手続き*

1J－7

山本雅人 †　大柳俊夫 ‡　大内　東 †

† 北海道大学工学部　‡ 札幌医科大学保健医療学部

1 はじめに

Jeroslow は関数記号を含まない論理式の充足可能性判定のための部分例示手法の理論的枠組みを提案している [1]. 部分例示手法は真理値の割当てを用いることによって節の増加を抑えようとするものである. しかしながら, Jeroslow の方法では関数記号を含む論理式は扱うことができない. 本稿では, 関数記号を含む論理式に対しての部分例示手法に基づいた定理自動証明手続きを提案する. この手続きは節形式の論理式を扱うが, そのことによって一般性を失うことはなく, むしろ Jeroslow の方法より効率的であることを示す. また, 完全性が成り立つことの証明を与えている. さらに, 導出原理に基づく方法との比較実験によって本手続きの有効性を示す.

2 諸定義

本稿で提案する手続きは, 以下のような m 個の節からなる節集合を扱う.

$$S = \{C_1, \cdots, C_m\}$$

定義 1

節 C が節 C_i の例であるなら, C_i は C を被覆するという. また, C_i が C を被覆し, かつ C_i を除く C の例を S が含まないなら, C_i は C を直接被覆するという.

定義 2

変種であるすべての原子式に同じ真理値を割当てる真理値の割当てを変種独立割当てという.

*A Theorem Proving Procedure based on the Partial Instantiation Technique
Masahito YAMAMOTO and Azuma OHUCHI
Faculty of Engineering, Hokkaido University
Toshio OHYANAGI
School of Health Sciences, Sapporo Medical University

定義 3

節集合 S_k のすべての要素が S の例であり, かつ, $S_k \supseteq S$ であるとき, S_k を S の拡大という.

定義 4

V が S を真とする変種独立割当てであるとする. また, F, G を l_F, l_G にそれぞれ現れる原子式であるとする. 但し, l_F, l_G は節 C_i, C_j にそれぞれ現れるリテラルである. このとき, 以下の条件をすべて満足する原子式 F, G の組は純障害物であると呼ばれ, $\langle F, G\rangle_{i,j}$ と表す.

(1) F と G は V で異なる真理値を割当てられている.

(2) l_F と l_G の両方が V で真である.

(3) $F\sigma = G\sigma$ となる最汎単一化作用素が存在し, $F\sigma$ の例が C_i' と C_j' の両方に現れる. 但し, C_i', C_j' は C_i, C_j によってそれぞれ直接被覆されているとする.

3 定理自動証明手続き

本稿で提案する手続きの概要を図 1 に示す. この手続きは, 以下の三つの処理を節集合 S の充足可能性が判定されるまで繰り返す. 尚, 各繰り返しで扱う節集合を S_k とする.

1. S_k を真とする変種独立割当て V_k を求める.
2. V_k に対して, S_k 中のすべての純障害物を求める.
3. すべての純障害物を解消するために S_k の拡大 S_{k+1} を求める.

本手続きの健全性および完全性は以下の定理で保証される.

定理 1

S_k を S の拡大であるとする. S_k を真とする変種独立割当てが存在しなければ S は充足不能である.

```
begin
  k ← 1, S_k ← S ;
  loop
    V_k ← a variant independent valuation which makes S_k true ;
    if  V_k is empty  then  S is unsatisfiable ; (stop)
    B_k ← all proper blockages in S_k for V_k ;
    if  B_k is empty  then  S is satisfiable ; (stop)
    compute an expansion of S_k ;
    k ← k + 1 ;
  endloop ;
end ;
```

図 1: The framework of the proposed theorem proving procedure.

定理 2

S が充足不能なら，ある有限の k において S_k を真とする変種独立割当てが存在しない．

4 例題

以下の三つの節からなる節集合 S を考える．

$$C_1 = P(a)$$

$$C_2 = \neg P(x) \vee P(f(x))$$

$$C_3 = \neg P(f(f(a)))$$

$S_1 = S$ とし，$S_1 = \{C_1, C_2, C_3\}$ を真とする変種独立割当て V_1 を求める．例えば，V_1 は以下のように求まる．

$$C_1 = \underbrace{P(a)}_{True}$$

$$C_2 = \neg \underbrace{P(x)}_{False} \vee \underbrace{P(f(x))}_{True}$$

$$C_3 = \neg \underbrace{P(f(f(a)))}_{False}$$

S_1 には V_1 に対して二つの純障害物 $\langle P(a), P(x)\rangle_{1,2}$，$\langle P(f(x)), P(f(f(a)))\rangle_{2,3}$ が存在する．これらから，S_1 を拡大すると，

$$C_4 = \neg P(a) \vee P(f(a))$$

$$C_5 = \neg P(f(a)) \vee P(f(f(a)))$$

が生成される．

そして，$S_2 = \{C_1, \cdots, C_5\}$ を真とする変種独立割当ては存在しないので，S は充足不能である．

5 実験

本手続きの有効性を示すために，従来から広く用いられている導出原理に基づく方法との比較を行う．実験方法および結果の詳細については当日発表する．

6 おわりに

本稿では，部分例示手法に基づいた完全な定理自動証明手続きを提案した．本手続きでは，原子式への真理値の割当ては任意のものを用いてかまわないが，この割当てが計算時間に影響を与えるため，どのような割当てを用いるかという戦略について検討することが今後の課題である．

参考文献

[1] Jeroslow R. G. : Computation-Oriented Reductions of Predicate to Propositional Logic. *Decision Support Systems*, Vol. 4, pp. 183–197 (1988).

[2] Davis M. and Putnam H. : A Computing Procedure for Quantification Theory. *Journal of the ACM*, Vol. 7, pp. 201–215 (1960).

[3] Robinson J. A. : A Machine-Oriented Logic based on the Resolution Principle. *Journal of the ACM*, Vol. 12, pp. 23–41 (1965).

[4] Pelletier F. J. : Seventy-five Problems for Testing Automatic Theorem Provers. *Journal of Automated Reasoning*, Vol. 2, pp. 191–216 (1986).