制約条件付き最適化問題の解法

6H−1

真田　正徳　　大堀　隆文　　渡辺　一央
北海道工業大学　電気工学科

1　まえがき

階層形３層ニューラルネットによって，不等式による制約条件付き最適化問題を解く手法を明らかにする．簡単な課題に対するシミュレーションによって，その妥当性を検証したので報告する．

2　最適化問題の定式化

不等式の制約条件 $g_j(\boldsymbol{x}) \leq 0$ の下で，目的関数 $f(\boldsymbol{x})$ が最小となる入力ベクトルを求める最適化問題を次式のように定式化する．

$$\begin{cases} \min\limits_{\boldsymbol{x}} & f(\boldsymbol{x}) \\ subj.\ to & g_j(\boldsymbol{x}) \leq 0 \quad (j = 1, \ldots, J) \end{cases} \tag{1}$$

3　最適化の手順

3.1　関数近似

入力ベクトル $\boldsymbol{x}$を乱数で多数生成し，制約条件 $g_j(\boldsymbol{x})$ $(j = 1, \cdots, J)$ と目的関数 $f(\boldsymbol{x})$ の値がそれぞれ３層ニューラルネット（図１）の $o_j(\boldsymbol{x})$ と $o_{J+1}(\boldsymbol{x})$ に出力されるようＢＰ法で記憶・学習する．

3.2　最適値探索

ネットワークの出力値 $o_j(\boldsymbol{x})$ $(j = 1, \cdots, J)$ と $o_{J+1}(\boldsymbol{x})$ から成る探索評価関数 $E\{\boldsymbol{x}\}$ を

$$E\{\boldsymbol{x}\} = \Sigma_j \{a_j o_j(\boldsymbol{x})^2\} + o_{J+1}(\boldsymbol{x}) \tag{2}$$

$$a_j \begin{cases} \gg 1: & o_j(\boldsymbol{x}) > 0 \\ = 0: & o_j(\boldsymbol{x}) \leq 0 \end{cases}$$

とする．これを最小化することで，制約条件を満たし目的関数が最小である入力ベクトル $\boldsymbol{x}$ を探索する．具体的には，入力ユニットに付加する互いに無相関な雑音 $\boldsymbol{n}(t)$ を用いて，偏微分量

$$\frac{\partial E\{\boldsymbol{x}\}}{\partial x_h} = \frac{< E\{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{n}(t)\} n_h(t) >}{< n_h(t)^2 >} \tag{3}$$

を算出し，入力ベクトル $\boldsymbol{x}$ の修正を

$$x_h \leftarrow x_h - \mu \frac{\partial E\{\boldsymbol{x}\}}{\partial x_h} \tag{4}$$

とすることで最急降下法による探索を行う．

求めた最適値は関数近似したネットワークを用いるため，関数近似による誤差の影響を必然的に含んでいる．そこで再度，求めた最適値付近の狭い範囲で関数近似を行い，最適値探索を行うと，より精度の高い最適値を得ることができる．

4　シミュレーション

目的関数及び制約条件をそれぞれ

$$f(x) = (x_1 + x_2)^2 + (x_3 + 0.5)^2 \tag{5}$$

$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 \leq 0 \tag{6}$$

$$g_2(x) = (x_1 - 0.5)^2 + (x_2 - 0.5)^2 - 0.5^2 \leq 0 \tag{7}$$

としてシミュレーションを行う．また，シミュレーション条件として次のパラメータを使用する

ネットワーク構造	:入力 3-中間 10-出力 3
関数近似学習回数	:1000
関数近似学習偏微分係数	:0.001
関数近似学習標本数	:300
最適値探索修正回数	:50000
最適値探索修正係数	:$\mu = 0.0001$
	:$a_1, a_2 = 200$

上記のパラメータを用い，±1.5 の範囲の乱数で学習標本点を与え関数近似をし，最適値探索を行った．その後，求めた最適値付近に ±0.1 の範囲の乱数で再度学習標本点を与え関数近似し，最適値探索をした．これを２０回繰り返した．

5　シミュレーション結果

理論的最適値 $(x_1, x_2, x_3) \fallingdotseq (0.15, 0.15, -0.5)$ の時 $f(\boldsymbol{x}) \fallingdotseq 0.09$ に対し，ほぼそれを満足する結果を得た．図２に入力 $\boldsymbol{x}$ の推移を示す．

6　むすび

階層形３層ニューラルネットに，目的関数及び制約条件値を記憶・学習させ，無相関雑音を用いて探索評価関数を最小化することにより，不等式の制約条件付き最適化問題を解くことを示した．

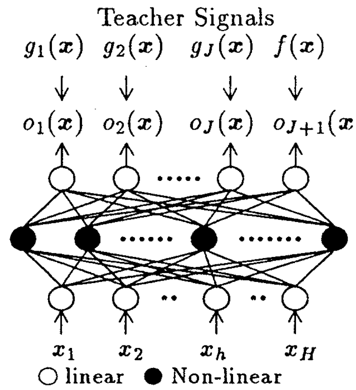

図１　３層ニューラルネット

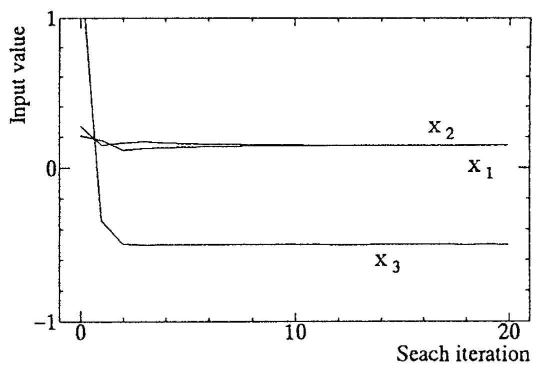

図２　入力$\boldsymbol{x}$の推移

参考文献

[1] 真田，大堀，渡辺：
”階層形ニューラルネットによる最適化問題の解法”
'94 情報処理北海道シンポジウム

A solution of constrained optimization problems
Masanori SANADA, Takahumi OOHORI,
Kazuhisa WATANABE
Hokkaido Institute of Technology, Teine-ku, Sapporo, JAPAN