

# 並列計算機を対象とした領域分割法 FEM の要素分割部

4P-8

野野 洋一 福盛 秀雄 安江 俊明 村岡 洋一

早稲田大学

## 1 はじめに

本稿では領域分割法 FEM(有限要素法) の三角形分割の並列化を提案する。

従来の粗分割-細分割法では、粗分割の処理を逐次に処理しているため、PE(プロセッサ) の数が増えると、粗分割処理が多くなり高いスピードアップが望めないという欠点があった。そこで、本稿では、粗分割も含めて並列化する手法を提案する。本手法では、i) PE への割り当て 始めに節点数の平均化を考えずに並列に三角形を各 PE に割り当て、ii) 並列粗分割部 各 PE が並列に三角形を粗分割する。iii) 並列細分割部 その後各 PE は隣接する PE と三角形を並列に交換しながら、節点数の平均化を行なう。本手法の特徴は、1) 粗分割を並列に実行し、2) PE 間の通信によって各 PE の持つ三角形数を平均化することである。

本手法を富士通の分散メモリ型並列計算機 AP1000 に実装した結果、逐次処理の実行時間に対して、PE64 台で約 13 倍のスピードアップが得られた。

## 2 要素分割の従来の研究

FEM の並列要素分割の手法には、粗分割-細分割法がある [1][2]。

粗分割-細分割法は以下の 3 処理からなる。1) 逐次粗分割 まず入力図形を三角形で覆い、この三角形を節点数の平均化に必要な三角形数 ([2] では PE64 台の時、粗分割数約 1000 個) まで粗分割する。この処理は従来は逐次処理されていた。2) PE への割り当て 後に続く細分割の負荷分散・ソルバ部の負荷分散を達成するため、あらかじめ細分割後の節点数を計算し、最終的な節点数が平均化するように、粗分割三角形を PE に割り当てる。PE への割り当てはほぼ並列に処理できる (図 4 のように粗分割後の三角形数を半分にする処理を繰り返す)。3) 並列細分割 各 PE は与えられた粗分割要素を解析に必要な細かさの要素になるまで並列に要素分割する。

この粗分割-細分割法を、多くの PE を持つ並列計算機に適用する場合、粗分割の要素数 (PE 数に比例) が多く必要であるため逐次処理 (粗分割) が増加しスピードアップが望めない。そこで本稿では粗分割の並列化を提案し、粗分割-細分割法の全体の並列化を行なう。

## 3 並列要素分割

提案する並列化方法の流れを図 3 に示す。入力情報は、解析領域の頂点座標、細かくしたい部分の座標、最終的

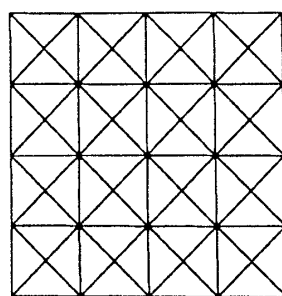


図 1: 初期割り当て状態

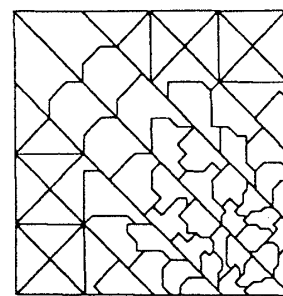


図 2: 最終割り当て状態

- ```

/*三角形分割*/
  入力図形を三角形に分割する;
/*PE への割り当て*/
  各 PE に最低 1 個の三角形を割り当てる (図 1);
/*並列粗分割部*/
  節点数の平均化に必要な数まで、
  各 PE が並列に三角形分割する (並列粗分割);
/*節点数の平均化*/
  隣接する PE の中から、通信 PE を決定;
  PE 間で節点数が平均化するように、
  相手 PE と三角形を並列に交換 (図 2);
/*並列細分割部*/
  解析に必要な数まで、各 PE が並列に三角形分割する;
  
```

図 3: 並列要素分割の流れ

な三角形の総数とする。1) 三角形分割 まず解析領域を三角形に分割する。2) PE への割り当て 図 4 のように分割と PE への割り当てを同時に行ない、各 PE に担当領域として最低 1 個の三角形を割り当てる。3) 並列粗分割部 各 PE は担当する領域を、細かくしたい座標からの距離によって各三角形の分割数を決定し、並列に分割する。この 1 回の操作ごとに、PE 間の通信によって総数を求め、節点数の平均化に必要な総数になるまで繰り返す。4) 節点数の平均化 各 PE は担当領域の隣接する PE と三角形を交換し、各 PE の担当領域の節点数を平均化する。(図 1 の PE の割り当てに対して、節点数の平均化による隣接 PE との三角形の交換を繰り返していくと、最終的に図 2 ような PE の割り当て状態になる)。5) 並列細分割部 変更後の担当領域を、各 PE は解析に必要な総数 (入力情報) まで三角形に分割する。

以下では、本手法の特徴といえる PE への割り当てと節点数の平均化を説明する。

### 3.1 PE への割り当て

PE への割り当ては図 4 のように、1 台の PE (親 PE) が担当する三角形の半分を、もう 1 台の別の PE (子 PE) に送信していき、すべての PE に最低 1 個以上の三角形を割り当てる処理である。もし別の PE へ送信する時に三角形を 1 個しか持たない場合は、全 PE の持つ全

三角形をさらに分割し(図4)、子PEに三角形を送信する。1回の送信ごとに、各PEは親PEを介して隣接するPE番号の情報(境界情報)を変更していく(例えば図4 step1では、PE2とPE6が接するという境界情報を、PE4とPE0を介して、PE2とPE6は知る。こうすると局所的な通信で境界情報の変更ができる)。

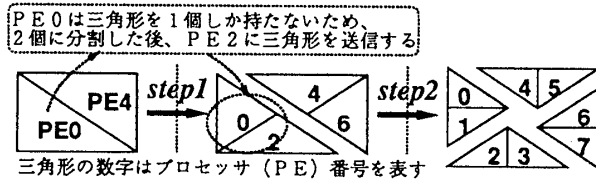


図4: PEへの割り当て

### 3.2 節点数の平均化

各PEの担当する三角形数は異なるため、通信によって隣接するPEと三角形を交換しながら、各PEの担当する三角形の変更を繰り返し、各PEの節点数を平均化する。各PEは隣接する複数のPEの中から、通信相手のPEを決定し、三角形数の多いPE(送信側)が、全PEの持つ三角形の平均数との差の三角形だけ、三角形数の少ないPE(受信側)へ送信する。送信側のPEは、節点数を少なくするために、最終的な担当領域の境界辺が短くなるように送信する三角形を探索する。

節点数の平均化の処理を行なう毎に、各PEの担当する三角形は移動し、隣接するPEの番号も変化する。したがって、平均化の処理毎に隣接PE番号を修正していく。この修正は送信側PEを介して行なう。例えば図5ではPE2とPE1が節点数の平均化の後に互いに接することを、PE3を介して修正する。

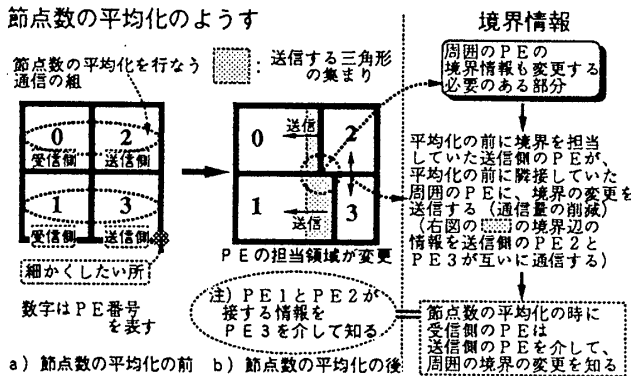


図5: 節点数の平均化と境界の変更

通信相手の決定では、以下の仮定を設ける。「細かくしたい部分を担当したPEは、節点数の平均化の処理を行なう前に、周囲のPEより多くの三角形を持っている。」この仮定を基に、細かく分割する領域を担当したPEは、細かくしたい座標(入力情報)から遠い領域を担当しているPEの方へ三角形を送信し、担当領域を狭くしていく。この処理を繰り返すことで、PE間の節点数は平均化される(節点数の平均化とは三角形数の平均化を意味する。なぜなら、三角形の数が多い場合、節

点数はほぼ三角形数に比例するからである)。先の仮定に反する時は、三角形の交換をスムーズに行なえない場合がある。

## 4 評価

本手法を分散メモリ型並列計算機に実装し評価した。使用した富士通のAP1000は8×8の64台構成であり、ピーク性能5.56MFLOPS/cellである。評価する図形として1頂点の周囲を細かくする正方形を入力する。PEへの割り当ての初期状態を図1に、PEへの割り当ての最終状態を図2に示す。節点数の平均化の処理により、図2では右下にPEが集まってきているのが分かる。粗分割数を約1600個、最終分割数を約20000個とした時の並列化によるスピードアップのようすを図6に示す([2]の結果の平均値も併せて示す)。64台のPEを用いて、PE間の節点数の偏りは約1.3倍、逐次処理に比べて約13倍のスピードアップが実現できた。各処理時間を表1に示す。表1より、節点数の平均化の処理における反復数が並列化の妨げになっているのが分かる。

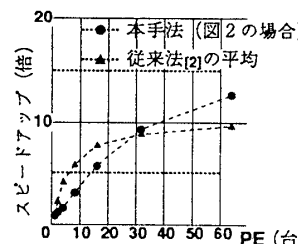


表1: PE64台の時の処理時間

| 処理      | 時間 秒  | 割合 % |
|---------|-------|------|
| 逐次部     | 0.003 | 0.2  |
| PEへの割当  | 0.042 | 2.2  |
| 並列粗分割部  | 0.005 | 0.3  |
| 節点数の平均化 | 1.16  | 61   |
| 並列細分割部  | 0.68  | 36   |

粗分割数:1600個、最終分割数:20000個  
注:節点数の平均化では、三角形の交換を13回繰り返している

図6: スピードアップ

## 5 おわりに

有限要素法の要素分割から解析までを実行するトータルシステムを分散メモリ型並列計算機を使って高速化させるための一段階として、粗分割-細分割法の、粗分割部の並列化を提案した。並列計算機AP1000で評価し、PE64台のとき約13倍のスピードアップが達成できた。この節点数の平均化方法は粗分割時のみではなく、細分割の後にも行なうことで、最終的な節点数の平均化の達成も可能である。

本手法では、任意の解析領域を分割した場合、節点数の平均化の処理におけるPE間の通信は最悪の場合約PE回必要であり、台数効果が低くなってしまふ。今後この通信方法を改良する必要がある。

## 謝辞

本研究に当たり、AP1000を使わせて頂いたことを(株)富士通および並列処理センターに感謝致します。

## 参考文献

- [1] I.St.Doltsinis and S.Noelting: Studies on parallel processing for coupled field problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 89, pp. 497-521 (1991).
- [2] 河野 他:分散メモリ型並列計算機上の有限要素法のための要素自動分割、情処第48回全大、1-135、1994.