単峰領域の概念に基づくmultistart法を用いた多峰性関数の大域的最適解の求解に関する考察

4P－4

金光 秀雄[1)]　宮腰 政明[2)]　新保 勝[2)]
[1)] 北海道教育大学 函館校　[2)] 北海道大学 工学部

1．はじめに

非線形多変数関数の最小化問題において，最小化する目的関数が単峰の場合は，凸関数等の性質を利用した効率的な手法(降下法)が存在し，その収束性も十分研究されている[2]．一方，関数が多峰で複数の極小点を有する場合に，その大域的最適解を求める手法については，従来からの手法に加え，SA法や GA法などの新しい枠組みの手法が登場し，最近非常に研究が盛んになってきている[3,4]．しかし，これらの手法は従来の降下法のように効果的ではなく，しかもその収束性が示されていないものが多い．これは多峰性関数の性質が充分解明されていないのが大きな原因であると考えられる．本稿では，多峰性関数の極小値集合から各極小値集合での単峰領域を定義する．つぎに，単峰領域の定義から，multistartアルゴリズムが最小点を見い出す確率を導き，考察する．

2．準　備

［問題］ここでは次のような非線形多変数関数の最小化問題を考える．

(2.1)　目的関数: $f(x)\rightarrow \min$,
　　　制約条件：$x\in S\subset R^n$

［定義１］αにおける関数fのレベル集合等

関数$f(x)$ の $\alpha\in R$ におけるレベル集合$L(\alpha)$および小レベル集合$L^L(\alpha)$ をそれぞれ次のように定義する．

(2.2)　$L(\alpha)=\{x \mid f(x)\leqq\alpha;\ x\in R^n\}$

(2.3)　$L^L(\alpha)=\{x \mid f(x)<\alpha;\ x\in R^n\}$

［記法］集合Aの連結成分の個数：$N_{ce}(A)$

集合Aの連結成分の個数を$N_{ce}(A)$で記す．

［定義２］xの連結レベル集合：$L_c(\alpha;\hat{x})$

レベル集合 $L(\alpha)$ の部分集合で $\hat{x}$を含む連結成分を，$\hat{x}$を含む連結レベル集合と呼び，$L_c(\alpha;\hat{x})$ で表す．また，レベル集合$L(f(\hat{x}))$の部分集合で，$\hat{x}$を含む連結レベル集合を特に$L_c(f(\hat{x}))$と記す．同様に,小レベル集合$L^L(\alpha)$の部分集合で $\hat{x}$を含む連結成分を，$\hat{x}$を含む連結小レベル集合と呼び，$L_c^L(\alpha;\hat{x})$ で表す．

3．極小値集合と単峰領域の定義

［定義３］x^*での関数値$f(x^*)$における極小値集合：$L_{mc}(f(x^*))$

$x^*\in R^n$が存在して，任意の$\varepsilon>0$に対して

(3.1)　$L(f(x^*)-\varepsilon)\ \cap\ L_c(f(x^*))\ =\ \phi$

を満足するとき，この$L_c(f(x^*))$をx^*における極小値集合と呼び，特に$L_{mc}(f(x^*))$で表す．

［定義４］x^* を含む極小値集合$L_{mc}(f(x^*))$上の単峰領域：$L_{um}(x^*)$

x^* を含む極小値集合$L_{mc}(f(x^*))$ において，

(3.2)　$\alpha_{um}=\max_{\alpha}\{N_{ce}(L^L(\alpha_s)\cap L_c^L(\alpha;x^*))=1\}$
　　ただし，$\forall\alpha_s\in[f(x^*),\alpha]$

を満足する α_{um} より定まる $L_c^L(\alpha_{um};x^*)$ を，x^* を含む極小値集合 $L_{mc}(f(x^*))$の単峰領域と呼び，$L_{um}^L(x^*)$で表す(図1)．

4．multistart 法と大域的最適解の求解確率

multistart法は従来からよく用いられる基本

A Study on Finding the Global Solution of a Multimodal Function by Using a Multi-start Method Based on a Unimodal Region.
Hideo KANEMITSU[1)], Masaaki MIYAKOSHI[2] and Masaru SHIMBO[2)]
[1)]Hakodate Campus, Hokkaido University of Education, Hakodate 040, Japan
[2)]Faculty of Engineering, Hokkaido University, Sapporo 060, Japan

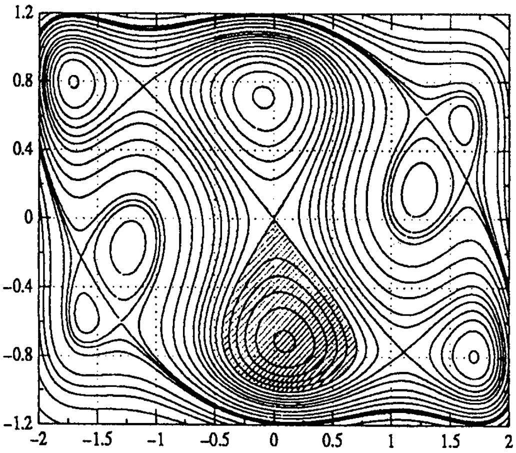

図1:関数の単峰領域(斜線部)

的な手法であり，複数の候補点を初期点として局所最適化手法を適用するものである．この手法を適用するときに，最小点を見い出す確率を前節で定義した単峰領域の概念に基づいて考察する．ここでは，次のステップからなるmulti-startアルゴリズムを考える．

Step1.　各変数が上下限制約からなる矩形の定義域 $D=[x_{L1},x_{U1}]\times[x_{L2},x_{U2}]\times\cdots\times[x_{Ln},x_{Un}]$ 内に一様乱数で N個の点をサンプリングし，各点での関数値を評価する．

Step2.　Step1でサンプリングした点での関数値が α_t 以下の点を選び出し，候補点とする．

Step3.　各候補点を初期点として，局所最適化手法を適用し，極小点を求める．

このとき，つぎのような仮定

a)それぞれの候補点は必ずある単峰領域の上にある．

b)各候補点を初期点として局所最適化手法を適用して得られた点は，b)のある単峰領域に含まれる極小値集合の１点に収束する．

をすると，multistart法が最小点x^{**}を見い出す確率および一定確率に必要なサンプリング数は，

(4.1)　　$P= 1-(1-(A/D))^N$

(4.2)　　$N= \log_{10}(1-P)/\log_{10}(1-(A/D))$

ただし，A:最小点を含む α_t 以下の単峰領域の面積($=L_{um}(x^{**})\cap L(\alpha_t)$)，D:定義域の面積で表される．

このことから，最小点を含む α_t 以下の単峰領域Aと探索領域Dとの比が重要になってくる．この面積が小さいときには，候補点が当該領域に落ちる確率が低くなるため，multistart法で最小値を見い出すことが困難になり，大きいときはその逆がいえる．なお，文献[1]では，Aの定義が明確になっていないが，本稿ではその明確な定義を与えている．

また，次式の２変数関数[3](図１)

$$f(\mathbf{x})=4x_1^2-2.1x_1^4+\frac{1}{3}x_1^6+x_1x_2-4x_2^2+4x_2^4$$

$$-2.0\leqq x_1\leqq 2.0,\ -1.2\leqq x_2\leqq 1.2$$

は，2点の最小点(0.08983,-0.7126),(-0.08983,0.7126)をもつから，α_t を α_{um} としたとき，Aは2つの単峰領域の和で表され，A/D≒0.15 となるから，P=0.95，P=0.99となるためのサンプリング回数はそれぞれ，N=19，N=29 となる．

５．おわりに

極小値集合から各極小値集合での単峰領域を定義し，この単峰領域の概念からmultistart法が最小点を見い出す確率が，候補点を選択する最小点を含むある域値以下の単峰領域と探索領域の比に依存することを示した．multistart法の詳細な収束性を導くことが今後の課題である．

[参考文献]

[1] S.H.Brooks: A Discussion of Random Methods for Seeking Maxima, Operations Research, Vol.6, No.2(1958), 244-251.

[2]今野 浩，山下 浩: 非線形計画法，日科技連，1978.

[3] A.A.Torn, and Antanas Zilinskas,A.: Global Optimizaton, Lecture Notes in Computer Science 350, Springer-Verlag (1989).

[4] A.A.Zhingljavsky: Theory of Global Random Search, Mathematics and Its Applications. Kluwer Academic Publishers, 1991.