ソボレフ空間 $H_0^s(\Omega)$ の再生核による補間法について

4P－1

渡辺 宏太郎 柏木 英一 生天目 章*

1 まえがき

多変数補間問題を定式化すると次のようになる. すなわち, 任意の異なるN個の点 $\{x_i \in R^n | i = 1, \ldots, N\}$ とN個の実数値 $\{y_i \in R | i = 1, \ldots, N\}$ に対して

$$F(x_i) = y_i \quad i = 1, \ldots, N \tag{1}$$

を満足するF(x)を見つけることである. 本報告はソボレフ空間 $H_0^s(\Omega)$(Ωは R^n の有界領域,$s > n/2$) の再生核 $K(x, y)$ がその線形結合

$$F(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i K(x, x_i). \tag{2}$$

を考えることにより補間法に適用できることを示すものである. 具体的にはこれらの再生核が正の定符号核となることを示す. 特に $H_0^s(\Omega)$ のノルムとして $(\sum_{|\alpha|=s} \| \partial^\alpha \cdot \|_{L_2(\Omega)}^2)^{1/2}$ を採用すると, これに対応する再生核を用いた補間はデータの相似変換, 回転と可換となることが証明される. このことを確かめるための数値実験を行った.

2 準備

定義 2.1 (ヒルベルト空間の再生核) F を定義域 E のヒルベルト空間をなす関数族とする. このとき,$x, y \in E$に対して $K(x, y)$ が

(a) 任意の $y \in E$に対して $K(x, y)$ が x の関数として F に属する.

(b) 任意の $y \in E, f \in F$に対して

$$f(y) = (f(x), K(x, y))_x. \tag{3}$$

をみたすとき $K(x, y)$ をヒルベルト空間 F の再生核という. ここで,$(\cdot, \cdot)_x$は変数 x に関する内積である.

再生核には次のような性質がある.

定理 2.1 (再生核の基本的性質)
行列 $K = (K_{i,j}) = (K(x_i, x_j))$ は正の半定符号である. すなわち, 任意の $x_1, \ldots, x_N \in E$に対して 2 次形式

$$\sum_{i,j=1}^{N} K(x_i, x_j) \bar{\xi}_i \xi_j$$

が非負である.

このことからもわかるように行列 $K = (K(x_i, x_j))$ の正則性については何もいえない. したがって, 一般には式(2)のように再生核 $K(x, y)$ の重ね合わせによって補間を行うことはできない. しかしながら, 後で示されるようにヒルベルト空間としてソボレフ空間 $H_0^s(\Omega)$,$s > n/2$ を考えたときには, その再生核から生成される行列Kは正則になり, 再生核 $K(x, y)$ を補間に使うことが可能となる.

3 行列 $K = (K(x_i, x_j))$ の正則性

$H_0^s(\Omega)$, $s > n/2$ に再生核が存在する.

補題 3.1 $H_0^s(\Omega)$, $s > n/2$ には再生核が存在する.

(証明) ソボレフの埋め込み定理を用いて証明される.
以上の準備の下で行列 $K = (K(x_i, x_j))$ の正則性が証明される.

定理 3.1 $\{x_i\}_{i=1}^N$ を E 上の任意の異なる N 個の点, $z = (z_1, \ldots, z_N) \in \mathbf{C}^N$ を任意のベクトルとする。ヒルベルト空間 *H(E)* が次の条件

(1) *H(E)* は再生核を持つヒルベルト空間である.

(2) $\phi(x_i) = z_i$をみたす$\phi(x) \in H(E)$ がつねに存在する.

をみたすならば, 行列 $K = (K_{i,j}) = (K(x_i, x_j))$ は正則である.

(証明) 行列 $K = (K(x_i, x_j))$ が正則でないと仮定する. 従って $\{\mathbf{c}^* = (c_1^*, \ldots, c_N^*) \in Ker(K) | \mathbf{c}^* \neq 0\}$ なるベクトル $\mathbf{c}^*$が存在する.

*An Interpolation Method Using a Reproducing Kernel of Sobolev Space $H_0^s(\Omega)$
KohtaroWATANABE,EiichiKASIWAGI,AkiraNAMATAME
Department of Computer Science The National Defence Academy

ここで $f^* = \sum_{i=j}^{N} c_j^* K(x, x_j) \in H_0^s(\Omega)$ なる関数を考える. $\|f^*\|^2_{H_0^s(\Omega)}$ の値を計算すると

$$\|f^*\|^2_{H_0^s(\Omega)} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} c_i^* c_j^* K(x_i, x_j) = 0$$

となる. したがって,$f^*=0$ である. ゆえに, 条件 (2) をみたすような$\phi(x) \in H(E)$ に対して

$$(\phi(x), f^*(x))_{H(E)} = 0$$

となる. よって

$$< z, c^* >_{\mathbf{C}^N} = 0.$$

ここで z は $\mathbf{C}^N$の任意のベクトルをとり得るので $\mathbf{c}^*=0$ が結論される. これは $\mathbf{c}^* \neq 0$ に矛盾する. したがって K は正則でなければならない.

条件 (1) については補題 3.1 で示されているが, 条件 (2) も成り立つ.

補題 3.2 Ωを R^nの領域とする.Ω上の相異なる N 点 $x_1, \ldots, x_N$に対して

$$\phi = \{(\phi(x_1), \ldots, \phi(x_N)) \in C^N | \phi(t) \in H_0^s(\Omega)\}$$

は $\mathbf{C}^N$ の全ての値をとり得る.

以上により行列 K が正則であることが証明された.

4 入力データの幾何学的変換と補間の交換性

$H_0^s(\Omega)$ には幾つもの同値なノルムが存在するが, 特に

$$\|\cdot\|_{H_0^s(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha|=s} \| \partial^\alpha(\cdot) \|^2_{L_2(\Omega)}\Big)^{1/2} \tag{4}$$

を採用すると, 入力データの回転, 拡大縮小と式 (2) を用いた補間は可換になる.

5 $H_0^s(\Omega)$ の再生核の具体例

5.1 $H_0^s(-R, R)$ の再生核の構成

式 (4) をノルムに持つ, $H_0^s(-R, R)$ の再生核の具体的表現を与える. 式 (4) をノルムに持つ $H_0^s(R^1)$ の再生核は $E^s(x, y) = C_s|x-y|^{2s-1}$である.($C_s$は s によって決まる定数.) ゆえに (4) をノルムに持つ $H_0^s(-R, R)$ の再生核を構成するには,$E^s(x, y)$ の (-R,R) への制限に

$$\frac{d^{2s}e(x)}{dx^{2s}} = 0 \tag{5}$$

かつ, 境界 $x = \pm R$で

$$\frac{d^k E^s(x, y)}{dx^k}\Big|_{x=\pm R} = -\frac{d^k e(x)}{dx^k}\Big|_{x=\pm R} \quad (1 \le \forall k \le s-1) \tag{6}$$

をみたすような補正項 e(x) を加えてやればよいことがわかる. このような考えにしたがって構成した再生核が次の例である.

例 5.1 y を開区間 (-R,R) 内の点とする, このとき

$$\begin{aligned}
K^1(x, y) &= -\frac{1}{2}\left(|x-y| - R + \frac{xy}{R}\right)\\
K^2(x, y) &= \frac{1}{2\cdot 3!}\Big(|x-y|^3 + \frac{R^3 - 3Ry^2}{2}\\
&+ \frac{3(R^2y + y^3)x}{2R} + \frac{-3(R^2 + y^2)x^2}{2R}\\
&+ \frac{(3R^2y - y^3)x^3}{2R^3}\Big)\\
K^3(x, y) &= -\frac{1}{2\cdot 5!}\Big(|x-y|^5\\
&+ \frac{-3R^5 + 10R^3y^2 - 15Ry^4}{8}\\
&+ \frac{5(-R^4y + 6R^2y^3 + 3y^5)x}{8R}\\
&+ \frac{5(R^4 - 6R^2y^2 - 3y^4)x^2}{4R}\\
&+ \frac{5(3R^4y + 6R^2y^3 - y^5)x^3}{4R^3}\\
&+ \frac{5(-3R^4 - 6R^2y^2 + y^4)x^4}{8R^3}\\
&+ \frac{(15R^4y - 10R^2y^3 + 3y^5)x^5}{8R^5}\Big)
\end{aligned} \tag{7}$$

は $H_0^s(-R, R)$, (s=1,2,3) の再生核をそれぞれ与える.

5.2 実験

再生核 $K^1(x, y), K^2(x, y), K^3(x, y)$ を用いた補間がデータの相似変換と実際, 交換可能になるかどうか調べる実験を行った. 実験の詳細については発表時に述べる.

6 参考文献

1)Duchon J.:Spline minimizing rotation-invariant semi-norms in Sobolev spaces, Lecture Notes in Math. 571, Springer-Verlag (1977)

2)Aronszajn N.:Theory of reproducing kernels. Trans. Amer. Math. Soc.,vol. 68, pp. 337-404 (1950)

3)Adams R. A.:Sobolev Spaces, Academic Press (1975)