

## 同次二次変換における発散収束境界の病的形状例に関する考察

3P-3

吉川毅 今井英幸 宮腰政明 伊達惇  
北海道大学 工学部

### 1. はじめに

2次元同次二次変換は T.Date and M.Iri[1] により、不変式系の立場から 10 個の型に分類がなされている。本論文では良く知られるジュリア集合のうち、変換の反復により漸近的に原点に収束するような点の初期値の集合を収束領域、その上限を発散収束境界と呼び、その発散収束境界の形状について考察する。これは変換式によって多様な形状を示す場合があるが、同じ分類の型の中で複雑な形状が出現するパラメータと出現しないパラメータがある。今回は、そのような変換の例として方向に関する変換がロジスティック写像となるものを取り上げて考察した。

### 2. ロジスティック写像を与える同次二次変換

今回扱う 2次元同次二次変換を

$$\begin{aligned} x' &= \lambda x^2 \\ y' &= \lambda \mu xy - \lambda \mu y^2 \end{aligned} \quad (1)$$

とする。(1) は変数変換  $\xi = y/x$  によって方向に関する 1次元変換

$$\xi' = \mu \xi (1 - \xi) \quad (2)$$

が得られる。ここで  $\xi' = y'/x'$  である。(2) はロジスティック写像と呼ばれる形で一般にそれはパラメータ  $\mu$  を  $0 < \mu \leq 4$ 、変数  $\xi$  を  $0 \leq \xi \leq 1$  に制限して考えるが、今回は  $\mu$  を 4 以上についても考え、 $\xi$  は全ての方向を表現するために実数全体で定義する。

変換 (1) は  $\mu = 1$  を除いて [1] の分類の Type I $\ominus$  に属する。この型は変換によって自分自身に移される方向、すなわち不動方向が 3 つ存在する型であり、変換 (1) の不動方向はロジスティック写像 (2) の不動点である  $\xi = 0$ 、 $\xi = (\mu - 1)/\mu$  と  $\xi = \infty (x = 0)$  である。 $\mu = 1$  の場合は 2 つ目の不動方向が

$$\xi = (\mu - 1)/\mu = 0$$

となり、不動方向が 2 つ存在する Type II(1) に分類される。

以下、簡略化のために  $\lambda = 1$ 、すなわち変換 (1) を

$$\begin{aligned} x' &= x^2 \\ y' &= \mu xy - \mu y^2 \end{aligned} \quad (3)$$

として、ほぼ同一の型に分類されるこの二次変換について、パラメータ  $\mu$  を変化させてその発散収束境界の形状の変化と特徴を述べる。

### 3. ロジスティック写像に関わる発散収束境界の構造

ロジスティック写像 (2) はその変換を繰り返すことにより、常に有限にとどまるか、 $-\infty$  に発散するかのどちらかである。ある初期方向  $\xi_0$  に対して (2) によって無限回変換したときに、その方向が有限にとどまるならば、 $x$  の変換式より  $\xi_0$  の方向の発散収束境界の  $x$  座標は 1 となる。一方、方向が変換によって  $-\infty$  に発散するならば、発散収束境界の  $x$  座標は 1 より小さくなる。このことを利用して、パラメータ  $\mu$  の範囲を 3 つに分け、各領域での発散収束境界の構造について調べる。

#### $0 < \mu < 1$ の場合

$\xi < (\mu - 1)/\mu$  の方向は変換 (2) によって  $-\infty$  に発散し、また  $\xi > 1/\mu$  の方向も同様に  $-\infty$  に発散する。これに対し、 $(\mu - 1)/\mu \leq \xi \leq 1/\mu$  では不動点に収束するため、その区間で発散収束境界は直線部分を持つ。例として  $\mu = 0.7$  の場合の発散収束境界とロジスティック写像のグラフを図 1 に示す。

#### $1 \leq \mu \leq 4$ の場合

初期値  $\xi_0 \in [0, 1]$  に対してはその写像が常に  $[0, 1]$  にとどまり、反対にそれ以外の初期値に対しては  $-\infty$  に発散する。したがって、 $0 \leq \xi \leq 1$  に対してその発散収束境界は直線部分を持つ (図 2)。

$\mu = 1$  の場合のみ分類される型が異なるが、その発散収束境界の形状についてはその前後のパラメータ値での形状との間に違いは特に見られなく、本質的には同じ形状であるということが出来る。

A Study of the Inclusion Mapping Structure of Divergence-Convergence Boundary of Homogeneous Quadratic Transformation corresponding to Logistic Mapping  
Takeshi Yoshikawa, Hideyuki Imai, Masaaki Miyakoshi, and Tsutomu Date  
Faculty of Engineering, Hokkaido University

ロジスティック写像 (2) が区間  $[0, 1]$  において  $\mu > 3$  で周期倍分岐が出現し、その後カオス状態となることはよく知られている。しかし今回の場合、それは方向の変換に対して起こるものであり、発散収束境界の形状には影響しない。つまり、 $\xi$  が不動点に収束する場合も周期解に収束する場合も、またカオス状態であっても、それが常に有限にとどまるという意味でその領域での発散収束境界は同じ直線部分を持つ。

$\mu > 4$  の場合

区間  $[0, 1]$  が、有限回の変換によって  $[0, 1]$  を飛び出し  $-\infty$  に発散する領域でほとんど埋めつくされる。2つのそのような領域と領域の間にはまた  $[0, 1]$  区間全体が含まれるため、 $0 \leq \xi \leq 1$  での発散収束境界は非常に複雑となり、境界の  $x$  座標が 1 となる方向はカントール集合と 1 対 1 の対応がつく (図 3)。

4. まとめ

[1] の分類の方法は発散収束境界の形状を意識したものではなく、そのため同一の型の中でも多様な形状が見られる。また反対に本質的に同じ形状であっても異なる型に分類される場合もあるためそういった観点からの分類を考える必要がある。今回はすでになされている 2 次元同次二次変換の分類ではほぼ同一の型に属する変換として、その方向の変換がロジスティック写像に対応するものを例にとり、パラメータによる発散収束境界の形状の変化と複雑な形状の構造について考察した。

参考文献

[1] T.Date and M.Iri : Canonical Forms of Real Homogeneous Quadratic Transformations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol.56, No.3, pp.650-682 (1976).  
 [2] 伊達 惇 : 二次変換の発散収束境界の諸性質, 情報処理, Vol.19, No.6, pp.507-513 (1978).

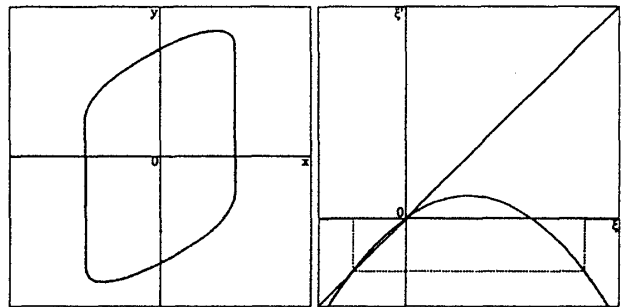


図 1: case  $\mu = 0.7$

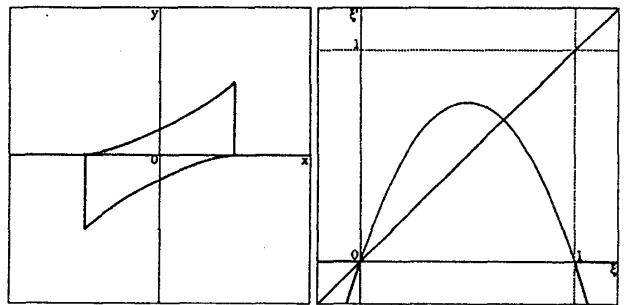


図 2: case  $\mu = 3.0$

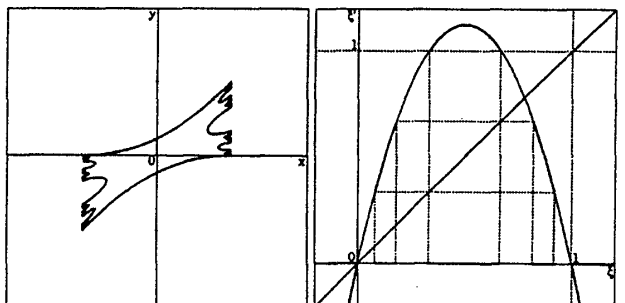


図 3: case  $\mu = 4.5$