エノン・アトラクタにおける非発散領域の解析

3P－2

岡崎 知也　青木 由直
北海道大学 工学部

1　はじめに

適当な初期値およびパラメータを与え，単純なフィードバックにより出力を得るというシステムをとり上げげた時，その系の挙動（反復回数を無限大に近づけていったとき）は，パラメータ値の組合せによって，反復を繰り返す毎に無限大へ発散するか，または非発散という２通りの挙動があり，さらに非発散の場合，ある一点に向かって収束，周期的サイクル，準周期点アトラクタ，収束も発散もせずにさまざまな値をとり続ける（ストレンジ・アトラクタ，すなわちカオス状態），という状態が考えられる．

本稿では，エノン・アトラクタをとり上げ，そのパラメータ空間において発散・非発散に分類を行ない，その領域を図示し，さらにこの非発散領域を先に述べた内の準周期点アトラクタを除く３つに分類することを目標とし，その方法について検討する．

2　実験対象

実験に用いた Hénon Attractor は次式で示される．

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n - a x_n^2 + 1 \\ y_{n+1} = b x_n \end{cases} \tag{1}$$

この式において，パラメータ a, b 及び x, y は互いに独立である．

3　実験

3.1　周期点の数によるパラメータ・マップの描画

最初に系をパラメータによって発散するかしないかの２つに分類を行なった（図1参照）．さらにこのうちの非発散，つまり最も内側の領域に注目し，周期点の数によるカラーリングを行なう．以下，これをパラメータ・マップと呼ぶこととする．

具体的には，a-b 平面上のすべての点（実際は平面をピクセル数で分割した格子上の点）のパラメータの組合せに対し，任意の初期値 x_0, y_0 を与え十分な反復（1000 回程度）を行なった後，(x, y) の挙動をトレースする．a-b 平面上にはこの動きを表さずに，周期点の数をカウントし，その数に応じたカラーリングを行なうというわけである．

Fig. 1　パラメータ・マップ

その結果を図2に示す．初期値の値は，$x_0 = 0, y_0 = 0$，座標は x 軸方向，y 軸方向共に-3 から 3 までである．

この図によって非発散領域における周期点の数がどのように分布しているかが明確にされた．同じ数の周期点を持つパラメータの組合せが'まとまった'領域に集まっているという点は想像しやすいと思われる．しかし，この図では分割されたそれぞれの非発散領域がいくつの周期点を持つかという情報は表され得ない．そこで，次に述べる分岐ダイアグラムを用い，これと併せた解析を行なう．

3.2　分岐ダイアグラム

a, b のパラメータの一方を固定し，他方を横軸にとり，任意の初期値 x_0, y_0 を与え十分な反復（1000 回程度）を行なった後，x_n（ただし $n = 1001 \sim 1100$）をプロットする．これにより，点列 x_n の挙動を調べることができる．

先に述べたパラメータ・マップとの関連からいえば，マップを縦または横方向にスキャンし，それぞれの

Analysis of the Non-Divergence Area in the Hénon Attractor
Tomoya OKAZAKI and Yoshinao AOKI
Department of Information Engineering,
Faculy of Engineering, Hokkaido University
Nishi 8, Kita 13, Sapporo, Hokkaido 060, Japan

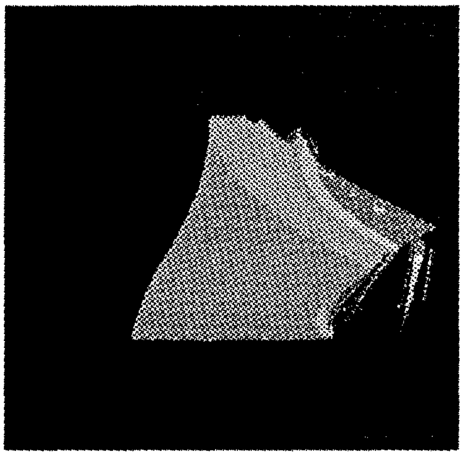

Fig. 2 周期点の数によるパラメータ・マップ

パラメータにおける x_nの値をプロットすることになり，これによって周期点の数を明らかにするというねらいがある．結果及びパラメータ・マップとの関係を示した図を図 3に示す．

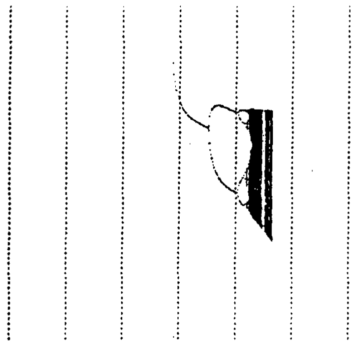

Fig. 3 分岐ダイアグラムとパラメータ・マップとの対応

図 3は上下左右共に−3 から 3,b の値を 0.2 で固定し図 1の白線の横方向に沿ってパラメータ a を変化させたときの x_{1001}から x_{1100}の値をプロットしたものである．

このダイアグラムにおいて特徴的なのは周期そのものの値はパラメータの変化に伴い連続的に変化するという点である．しかもこの枝状の分岐構造はフェアフルストの力学系に代表される構造である．すなわち,a の値の増加と共に周期の数が増加し，カオス状態へ到る過程がこの図に示されている．

総合すると，分岐ダイアグラムにおいて 1 本の線で描かれている範囲は収束領域,2 本以上は周期点アトラクタ，面状に広がっている部分はストレンジ・アトラクタという解釈ができる．

4 まとめ

エノン・アトラクタにおける非発散領域について分類を行なうことを試みた．その結果，

- 反復計算の結果,1 点に収束したり，周期的サイクルとなるパラメータ a,b の組み合わせが存在する．
- パラメータの片方を変化させた時に対応する周期点の変化の様子はロジスティック方程式に見られる分岐グラフと同様の形状を示す．

ことを明らかにした．

今後の課題としては，具体的な (例えば何かのモデリングなど)CG への利用へ向けての検討があげられる．

参考文献

[1] Karl-Heinz Becker, Michael Dörfler: *Dynamical systems and fractals* Cambridge Univercity Press.

[2] H.-O. パイトゲン, P.H. リヒター/ 宇敷重広　訳
フラクタルの美　複素力学系のイメージ
シュプリンガー・フェアラーク東京.

[3] 佐藤幸悦
マンデルブロ集合本体 *(ボディ)* の解明
マンデルブロ集合ボディの解明 *(2)*
第 7 回札幌コンピュータグラフィックスシンポジウム論文集 p.156-167 (1993,Nov. 29-30).