K-dV Soliton のシミュレータと孤立波解の数値解析

3Ｐ－１

富山 賢吾　正道寺 勉　鈴木 一良　原 利次
日本工業大学

1．はじめに

ソリトンは，個性を保持するという特殊な性質を持った波のことである．それを明確にしたのは，Zabusky&Kruskalの計算機実験[1]の結果である．彼らの実験では、初期条件が幾つかの異なる振幅を持ったソリトンに分かれ，それぞれのソリトンは独立に移動し，衝突してもその波形は崩れることはなかった．この実験について，我々はさらに初期波形や計算上のパラメータを変えることによって，各モードのソリトンへの移行はどのように起こるかを調査した．そして，シミュレータを作製し実験を行った結果を報告する．

2．ソリトンのモデルと差分化

一般的なソリトンのモデルとして，sine-Gordon，非線形Schrödinger，Korteveg-de Vries(K-dV)の３つが挙げられる．ここでは，K-dVモデルを扱うことにする．K-dV方程式は，浅水波を記述する式や非線形格子を伝わる波の式から導くことができる．一般的にK-dV方程式は，

$$u_t + uu_x + \delta^2 u_{xxx} = 0 \quad (1)$$

となる．ここで添字t, xは時間及び空間の位置についての微分を表す．この式を数値計算できるように微分を差分で近似する．差分化したK-dV方程式は，Zabusky&Kruskalが用いたものを使うことにし，次式のようになる．

$$u_i^{j+1} = u_i^j - \frac{1}{3}\frac{k}{h}(u_{i+1}^j + u_i^j + u_{i-1}^j)(u_{i+1}^j - u_{i-1}^j) - \delta^2 \frac{k}{h^3}(u_{i+2}^j - 2u_{i+1}^j + 2u_{i-1}^j - u_{i-2}^j) \quad (2)$$

ここで，j, iは時間及び位置をサンプリングした離散値である．また，k, hは時間，位置のステップ，δは差分の計算を安定にするための定数で，彼らの使っていた数値0.022を採用した．

Simulator of K-dV Soliton and Its Numerical Analyses
Kengo Tomiyama, Tsutomu Shohdohji,
Kazuyoshi Suzuki, Toshitsugu Hara
Nippon Institute of Technology

3．システム設計

シミュレーション実験を行うにあたって，次のような設定項目を設ける．

1) 差分計算に関するパラメータの設定
2) 初期波形の設定
3) ２種類の波形表示
4) スペクトル解析

ここで，２種類の波形表示とは，時間経過に伴う波形の変化を動画，またはダイヤグラムのいずれで表示するかである．ダイヤグラムは個々のソリトンの位置の変化を，動画表示は振幅の変化を見るには有効である．スペクトル解析は，波形データを離散フーリエ変換(DFT)によって波形に含まれる周波数成分を調べるものである．このシミュレータの動作環境はMS-Windows3.1で，開発言語はVisual Basic2.0を用いた．シミュレータのウインドウ表示例を図１に示す．

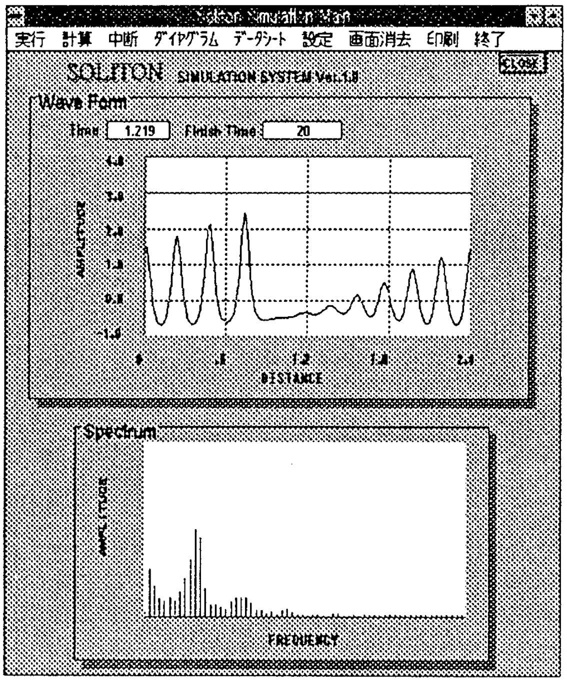

図１．　シミュレータのウインドウ表示例

ダイヤグラムはメインウインドウの波形を時間経過に伴い上にずらして描いていく．

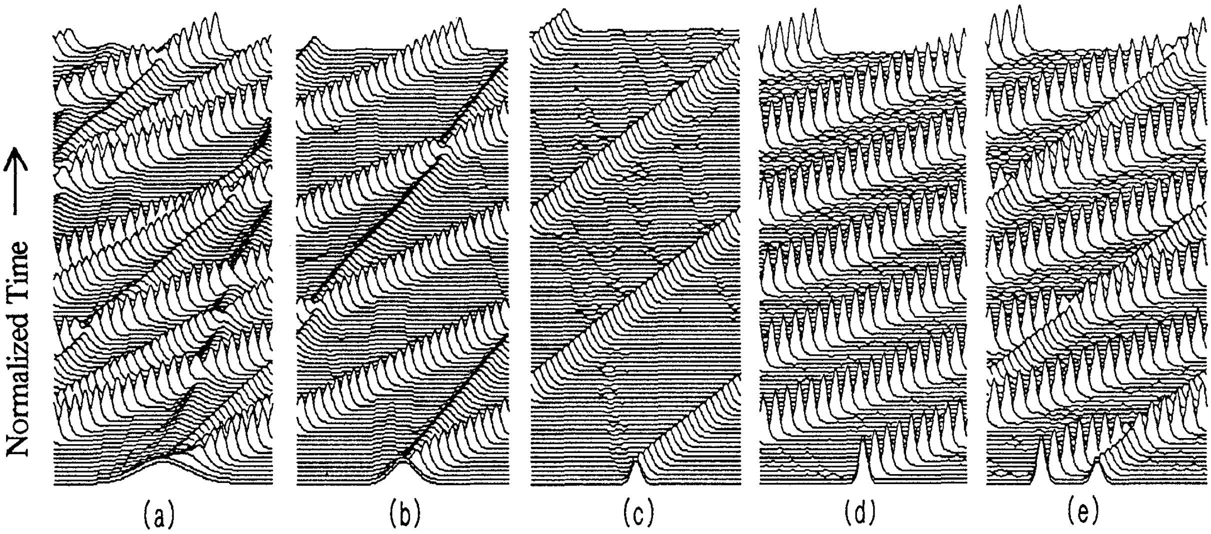

図2. ダイヤグラム

4. シミュレーション

このシミュレータを使って，(3)式のような初期波形に対してサンプリング数を200としてシミュレーションを行った．パラメータは，k=0.001，h=0.012で全て等しくする．

$$u\Big|_{t=0} = \exp(-a(x-b)^2) \tag{3}$$

a=1とa=4の結果を図2-(a)，(b)に示す．ここで，aは波数であり波長は逆数の関係を持っている．そのため，初期波形の波長によって分かれるソリトンの数に違いが表れる．そこで，波長を短くしていけば，ソリトンが1つになる初期波形が見つかると予想できる．さらに，その初期波形が形を崩さずに移動していけば，近似的にその解は，1-ソリトン解であると考えられる．波形が変わらないかどうかは，スペクトル分析を行えば容易に知ることができる．そこでaを変えていき，スペクトルが変わらないようなところで，1-ソリトン解とみなすことにする．そして得られた解を図2-(c)に示す．さらに，これとは違った振幅を持つソリトン解を探すことにする．振幅を先程の2倍にすると，ソリトンの性質から波長は短くなるから，aをさらに大きくとれば良いことが予想できる．こうして得られた解を図2-(d)に示す．実際には，弱分散がありスペクトルに若干の誤差が生じる．

次に，この2つの解を線形結合したものについてシミュレーションを行った．ここで，2つのソリトンが，これまでと同様に独立に移動をすればこれを2-ソリトン解とみなすことができるであろう．結果を図2-(e)に示す．この結果から，それぞれのソリトンは独立に，違った速度を持って移動し2つのソリトンの解になっていることがわかる．すなわち，近似的に1-ソリトン解の線形結合は2-ソリトン解になることがわかる．

5. 結論

非線形理論では，線形結合すなわち独立な解の単純和もまた解になるということは一般的には成り立たないが，特殊な場合において成り立つことが解析的に示されている．このシミュレーションの結果から見つけられた2つの振幅の異なる解については，線形独立であるかどうかはわからないが，結果的には解の結合を満たしたしている．この意味で非線形系における特殊な例を実験的に証明することができた．

6. おわりに

ソリトン解の性質ということを重点においてシミュレーションを行ってきたが，差分法やフーリエ変換といった計算手段については，精度的にも，処理の早さという点においても，アルゴリズムが十分ではないので，これらについて十分な評価と改良を行うことが今後の研究課題である．

参考文献

[1] N.J.Zabusky and M.D.Kruskal, Interlaction of "Solitons" in a Collisionless Plasma and The Recurrence of Initial States, *Phys.Rev.Lett.*, Vol.15, No.6, pp.240-243, 1965.