

2次元ボロノイ図の母点配置と退化についての考察

2P-6

渡部 篤 伊達 惇

北海道大学 工学部

1 はじめに

2次元ボロノイ図を作図計算する際に、通常は1つのボロノイ点については3本のボロノイ辺が付随しているのが、ボロノイ図が退化している場合、つまり、1つのボロノイ点において4本以上のボロノイ辺が交わる場合には、従来のアルゴリズムでは処理できないことが多々起こり得る。例えば、円周上に点を配置し、その点を母点としてボロノイ図を作図すると、理論的にはボロノイ辺はその円の中心で交わり、そこがボロノイ点となるはずであるが、数値計算の際に発生する誤差などにより、実際はそうはならない。そこで今回は退化の状況と、数値計算によって生じる誤差についてみていき、その問題点について考察する。

2 ボロノイ図とその作図法

ユークリッド平面 R^2 上の、 n 個の点 $P_i (i=1, \dots, n)$ の集合に対し、次のように定義される多角形領域を P_i のボロノイ領域（または多角形） $V_n(P_i)$ という。

$$V_n(P_i) = \bigcap_{j \neq i} \{P \in R^2 \mid d(P, P_i) < d(P, P_j)\}, \quad (1)$$

ただし、 $d(\cdot, \cdot)$ は2点間のユークリッド距離を示す。また、平面のボロノイ領域 $V(P_1), V(P_2), \dots, V(P_n)$ への分割をボロノイ図といい、その図の頂点をボロノイ点、辺をボロノイ辺と呼ぶ。 $P_i (i=1, \dots, n)$ を母点という。

ボロノイ図の作図法には、分割統治法¹、逐次添加法²などがあるが、今回は、逐次添加法を基礎にして考察する。その概要は以下の通りである。

n 個の母点が何らかの方法で P_1 から P_n まで順序づけられているとする。 $V_m (1 \leq m \leq n)$ を m 個の母点 P_1, \dots, P_m のボロノイ図とする。自明な図（例えば V_3 ）からはじめ、 V_{m-1} に新たに母点 P_m を付け加えて、 V_m の図へ修正することを繰り返すことにより、最

終的に V_n を作り出す。 V_{m-1} に P_m を加えて、 V_m へ修正する手順は、次の通りである。

まず、 V_{m-1} の母点 P_1, \dots, P_{m-1} の中で P_m に最も近いものを探す（その点を $P_{N(m)}$ とする）。次に、線分 $P_m P_{N(m)}$ の垂直二等分線を引き、それと $V_{m-1}(P_{N(m)})$ を形成するボロノイ辺との交点をみつけ、その辺を共有している隣りの領域 $V_{m-1}(P_{N1(m)})$ を決定する。次に、 $P_m P_{N1(m)}$ の垂直二等分線を引き、それと、 $V_{m-1}(P_{N1(m)})$ に属するボロノイ辺との交点を探し、その辺を共有する隣りの領域 $V_{m-1}(P_{N2(m)})$ もみつける。これを繰り返して、 $P_{N(m)}$ の領域に戻ってきたところで、 P_m の領域ができる。

3 退化とその問題点

何らかの作図手続きを行っていて、偶然に幾何的要素がある特殊な位置を占めたときに手續上の例外が必要となる場合、それを退化という。今回扱う退化は、新しいボロノイ領域の境界がボロノイ点をちょうど通過する場合である。

退化が生じた場合は、次節で述べるように通常のアルゴリズムでは破綻してしまい、特別な措置を必要とする。また、計算誤差などにより、本来ならば、退化が生じる場合でも退化が生じなかったり、あるいは退化がないはずの場合でも生じる場合もある。ボロノイ図が満たすべき位相構造と、異なる構造が現れ、アルゴリズムが破綻してしまうこともある。そこで今回は、これらの状況を分類、整理した上で、退化と誤差との問題点について考察する。

4 退化と計算誤差について

今回は単位正方形 $S = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ 内に母点を円周上に配置し、退化と計算誤差についてみてみた。なお、単位正方形の境界上の処理は境界を一種の特別なボロノイ辺と考える外周境界周回アルゴリズム³によった。この方法を用いると、逐次添加法により、はじめの1点目からボロノイ図を作図計算することができる。

A Study of Degeneracy Related to Configuration of Generators in Two-dimensional Voronoi Diagrams

Atsushi Watanabe, Tsutomu Da-te
Faculty of Engineering, Hokkaido University

¹参考文献 [1] 参照

²参考文献 [1] 参照

³参考文献 [2] 参照

実際に退化が起きるように母点を配置した場合でも、数値計算の際に起こる誤差によって、いくつかのケースにわかれる。

4.1 退化が起きていると判定される場合

4.1.1 実際に退化が起きている場合

この場合は、退化が厳密に判定されているので、判定には問題はないが、従来のアルゴリズムには退化が起きている場合の処理法が欠落しているため、特別な措置を必要とする。

例えば、図1で見られるように、新しい母点 p_4 の領域を作図計算中に、母点 p_2 と新しい母点 p_4 の境界がちょうどボロノイ点を通じた場合、このボロノイ点に接続している、かつ、母点 p_2 の領域の境界となるボロノイ辺を共有している母点 p_1 と p_3 の領域のどちらかが、次の対象となるが、従来のアルゴリズムではどちらになるかは判定不能である。そこで、判定法として新しい母点と近い方の母点を採用する方法をとると、図2に示されるような例では矛盾を生じる。この場合、母点 p_1 と新しい母点 p_4 の境界がボロノイ点を通っており、次の対象領域として母点 p_2 と p_3 の領域が考えられるが、母点 p_4 から近い母点 p_2 の領域ではなく、母点 p_3 の領域を採用しなければならない。

この例に見られる、退化が生じた場合には、より複雑な処理を施す必要性があり、今回、新しい母点に対する幾何的配置を考慮した方法を提案する。

4.1.2 計算誤差により退化が起きている場合

この場合、従来のボロノイ図とは異なったものが出力されることとなる。この現象が出現したかどうかの判定は、通常の数値計算誤差と同様に、計算精度を変更して計算した結果との一致の具合から判断する。

4.2 退化が起きていないと判定される場合

この場合、実際に退化が起きていない場合は、何も問題はない。しかし、実際に退化が起きている場合は、数値誤差により、新しく付け加えた母点の領域の境界が、ボロノイ点を通り過ぎず、その近くでボロノイ辺と交点をもつ。このとき、結果として、ボロノイ図の位相的性質を満たせば、真のボロノイ図に近いものが出力されるが、ボロノイ点と交点との位置が非常に近い場合、位相的性質を満たさなくなることがある。

5 今後の課題

今後の課題としてあげられるのは、退化が起これるはずなのに、数値誤差等により起こらないと判定された場合についてより詳しい分析を行ない、対策をたてることである。

参考文献

- [1] 伊理 (監), 腰塚 (編) 他 (1986), 計算幾何学と地理情報処理, 共立出版
- [2] 渡部, 宮腰, 伊達 (1993) ボロノイ図の作図計算作業領域について, 情報処理北海道シンポジウム '93 講演論文集, 70.

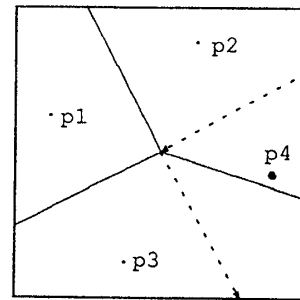


図 1: 退化が厳密に判定された例, その 1

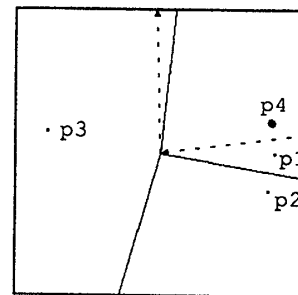


図 2: 退化が厳密に判定された例, その 2