多変数連立代数不等式の解法

2 P − 3

沢田浩之
機械技術研究所

1 はじめに

多変数連立不等式の求解における困難は，その解が無限個存在することにある [4]. すなわち無限個の解のすべてについて数値解を得ることは不可能であるため，必然的にそれら無限個の解の中から１つ以上の数値解を計算し，それを解の代表点として示すかあるいは解の不在を示すことになる.

本稿では，多変数連立不等式の解法として，その求解問題を閉域における関数の最小値問題に帰着させる方法について述べる. この解法では，まず，空間上で最小値を持つ関数を評価関数として導入する [2]. そして，連立不等式で与えられる制約条件のもとにおける評価関数の最小点を計算することによって，その連立不等式の解の代表点を求める. 最小点が存在しない場合，与えられた連立不等式は解を持たない. 本解法では，評価関数の最小点の計算には Lagrange 乗数法 [5] を用いている.

本稿の構成は以下の通りである. まず第 2節において問題設定および提案する解法の基本的な概念を説明したあと，その具体的な方法について述べ，第 3節では実際の計算例を示す. なお，本解法では実数解のみを対象としており，また，連立不等式の中には方程式も含まれるものとする.

2 基本的な概念

方程式を含む多変数連立代数不等式 (1) が与えられているものとする.

$$\begin{array}{lll} p_1(x)=0, & \ldots, & p_r(x)=0, \\ q_1(x)\geq 0, & \ldots, & q_s(x)\geq 0, \\ x & = & (x_1,\ldots,x_n). \end{array} \qquad (1)$$

不等式 (1) は一般に無限個の解を持つため，本稿ではそれら無限個の解の中から代表点として１つ以上の数値解を計算するか，あるいはまた解の不在を示すことによって不等式 (1) を解くものとする.

Solution of Algebraic Inequality Systems
Hiroyuki Sawada
Mechanical Engineering Laboratory
Namiki 1-2, Tsukuba, Ibaraki 305, Japan

ここで，空間上で最小値を持つ多項式関数 $f(x)$ を評価関数として導入する [2]. ただし，その最小値を与える点，すなわち最小点は有限個であるとする. 不等式 (1) で定義される点の集合を R とすると，R は閉じているので評価関数 f は R において最小値を持つ (図 1). 最小値が存在しない場合，不等式 (1) は解を持たない.

$$R=\{x|p_i=0, q_j\geq 0, 1\leq i\leq r, 1\leq j\leq s\}. \qquad (2)$$

したがって，閉域 R における評価関数 f の最小点を計

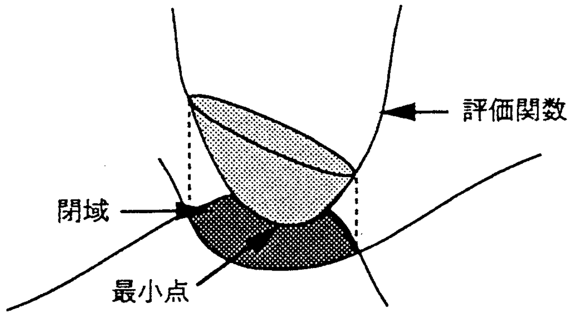

図 1: 評価関数の最小点

算することによって，不等式 (1) の解の代表点を求めることが可能となる. 閉域 R における評価関数 f の最小点は，評価関数 f の極値点と閉域 R の頂点および特異点を計算することで求められる. ここで各点の計算に当たり，閉域 R を次式 (3) で与えられる部分閉域 B に分割する. ただし，式 (3) において $0\leq m\leq s$ である.

$$\begin{array}{rcl} B & = & \{x|p_1=\ldots=p_r=q_{j_1}=\ldots=q_{j_m}=0, \\ & & q_{j_{m+1}}\geq 0,\ldots,q_{j_s}\geq 0\}. \end{array} \qquad (3)$$

部分閉域 B において，評価関数 f の極値点，閉域 R の頂点，閉域 R の特異点のうちのいずれを計算するかは B を構成する点が有限個か無限個かに依存するが，それは B を定義する方程式のグレブナ基底 [1] を計算することによって判定される.

2.1 評価関数の極値点

部分閉域 B が無限個の点によって構成される場合，B における評価関数 f の極値点を計算する必要がある. 本

稿では，極値点の計算に当たって Lagrange 乗数法を用いている．すなわち， Lagrange 乗数 λ_i および μ_j を導入し，関数 F を次式 (4) によって定義する．

$$F = f + \lambda_1 p_1 + \ldots + \lambda_r p_r + \mu_1 q_{j_1} + \ldots + \mu_m q_{j_m}. \quad (4)$$

連立方程式 (5) で与えられる点が極値点であり，不等式 (1) の代表点となる．

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x_1} = \ldots = \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0, \\ &p_1 = \ldots = p_r = q_{j_1} = \ldots = q_{j_m} = 0, \quad (5) \\ &q_{j_{m+1}} \geq 0, \ldots, q_{j_s} \geq 0. \end{aligned}$$

2.2 閉域 R の頂点

部分閉域 B が有限個の点によって構成される場合， B は閉域 R の頂点を示す．したがって， B がそのまま不等式 (1) の代表点となる．

2.3 閉域 R の特異点

部分閉域 B において，式 (6) で定義される Jacobi 行列 [6] の階数が $(r+m)$ 未満である点が存在するとき，その点を特異点 [3] という．

$$\begin{pmatrix} \partial p_1/\partial x_1 & \ldots & \partial p_1/\partial x_n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial p_r/\partial x_1 & \ldots & \partial p_r/\partial x_n \\ \partial q_{j_1}/\partial x_1 & \ldots & \partial q_{j_1}/\partial x_n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial q_{j_m}/\partial x_1 & \ldots & \partial q_{j_m}/\partial x_n \end{pmatrix}. \quad (6)$$

部分閉域 B が無限個の点によって構成される場合には，評価関数 f の極値点の他に特異点を計算しておく必要がある．特異点の存在は，連立方程式 (7) が $\nu_1 = \ldots = \nu_{r+m} = 0$ ではない解を持つことで示される．連立方程式 (7) が $\nu_1 = \ldots = \nu_{r+m} = 0$ なる解しか持たない場合には特異点は存在しない．

$$\begin{aligned} &\nu_1 \frac{\partial p_1}{\partial x_i} + \ldots + \nu_r \frac{\partial p_r}{\partial x_i} + \nu_{r+1} \frac{\partial q_{j_1}}{\partial x_i} \\ &\quad + \ldots + \nu_{r+m} \frac{\partial q_{j_m}}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n), \quad (7) \\ &p_1 = \ldots = p_r = q_{j_1} = \ldots = q_{j_m} = 0. \end{aligned}$$

特異点が存在する場合には，式 (7) に $\nu_j = 1$ $(1 \leq j \leq r+m)$ を順に代入し，特異点を計算する．

3 例題

不等式 (8) を例題として取り上げる．

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2) &= x_1(x_1 - 2)^2 + x_2^2 = 0, \\ q(x_1, x_2) &= x_1^2 - x_2^2 - 1 \geq 0. \quad (8) \end{aligned}$$

部分閉域は式 (9) で与えられる．

$$\begin{aligned} B_1 &= \{(x_1, x_2) | p(x_1, x_2) = 0,\ q(x_1, x_2) \geq 0\}, \\ B_2 &= \{(x_1, x_2) | p(x_1, x_2) = q(x_1, x_2) = 0\}. \quad (9) \end{aligned}$$

評価関数 f を式 (10) によって与える．

$$f = x_1^2 + x_2^2. \quad (10)$$

以下，第2節で述べた手続きにしたがって，各部分閉域における不等式 (8) の代表点を計算する．

1. 部分閉域 B_1
   B_1 は無限個の点を含むため，ここでは評価関数 f の極値点および B_1 の特異点を計算する必要がある．式 (9) の第 1 式および式 (10) を式 (5) に当てはめることによって極値点が計算されるが，この場合これを満足する解は存在しない．次に，特異点の計算を行う．式 (9) の第 1 式を式 (7) に当てはめることによって特異点 (11) が得られ，これが代表点となる．
   $$(x_1, x_2) = (2, 0). \quad (11)$$
2. 部分閉域 B_2
   B_2 は空集合であり，代表点は存在しない．

以上により不等式 (8) の代表点として式 (11) が得られる．

4 おわりに

多変数連立代数不等式の求解問題を，閉域における関数の最小値問題に帰着させる解法について述べ，その具体的な計算方法を示した．なお，評価関数 f の極値点および閉域 R の特異点が無限個存在する場合には，それらの関係式を新たな問題として本解法を再帰的に用いることによって解を得ることができる．

参考文献

[1] Buchberger, B.: *Gröbner bases: An Algorithmic Method in Polynomial Ideal Theory, Technical Report, RISC-LINZ*(1983).

[2] Nilsson, M.: Existence of real solutions to a system of algebraic equations and inequalities, Oral presentation at ICOT, October 23rd(1991).

[3] 上野健爾: 岩波講座応用数学: 代数幾何， p.40，岩波書店，東京 (1993).

[4] 小林英恒: 多変数連立代数方程式の解法，情報処理，Vol.27， No.4， pp.414-421(1986).

[5] 高木貞治: 解析概論， p.323，岩波書店，東京 (1961).

[6] 服部晶夫: 岩波講座応用数学: いろいろな幾何 II, p.8，岩波書店，東京 (1993).