Tabu Searchによる半順序の系列分割問題*

1P－7

加地太一　　大内東
小樽商科大学　北海道大学

1．はじめに

グラフ分割問題の特別なケースとして、グラフの頂点番号を１からｎまで連続的な数とする一列化グラフに対して、各ブロックの頂点番号の連続性を保持するKernighanの系列分割問題[1]がある。しかし、多くのシステムの構造はより一般的な無閉路有向グラフで構成されており、その上での系列分割について検討する必要がある。前回の発表等[9]で、この無閉路有向グラフの系列分割問題に問題を拡張し、その厳密解法を与えた。本稿では巨大な問題をより高速に解くために、無閉路有向グラフの最適系列分割問題に対して、Tabu Searchによる近似解法の適用を試みる。Tabu SearchはFred Glover[2),3),4)]によって提案された局所探索法の変形である。その大まかな戦略は探索過程で以前に探索した解に再び戻る解のサイクリングをタブーリストを設けることによって禁止する処置をとることである。

2．無閉路有向グラフの系列分割問題

単一の入口と出口を持つ無閉路有向グラフD(V,E)が与えられたとき、Dの有向辺が定めるV上の関係の反射的かつ推移的な閉包による関係を≦とする。ここで、Dから導かれる半順序集合を(V,≦)で表す。

<u>定義１．</u>　空でない部分集合U⊂Vから誘導されたDの部分グラフをHとする。Hの任意の２点を結ぶDの有向路がすべてHの有向路となるとき、Hは<u>系列を保持する</u>Dの部分グラフであるという。

<u>定義２．</u>　Vの部分集合Aが、A^c×Aから選んだ２元対(x,y)に関して、ｘとｙが≦において比較可能ならば常にｘ＜ｙが成立するとき、(A^c,A)をAによって定まるVの<u>切断</u>という。そして、Aをこの切断の<u>上組</u>、A^cを<u>下組</u>という。

<u>定義３．</u>　Vの互いに素な部分集合XとYがそれぞれVのある切断の下組と上組に含まれるならば、XとYは切断により<u>分離</u>されるといい、X｜Yで表す。XとYについてX｜YまたはY｜Xが成り立つとき、XとYは<u>分離可能である</u>という。

ここで、Kernighanの系列分割の２つの特徴を拡張して、無閉路有向グラフの系列分割を次の様に定義する。

<u>定義４．</u>　D(V,E)の頂点集合Vの分割$V_1, V_2, \cdots, V_k$が次の性質を満たすとき、これをVの<u>系列分割</u>という。
(1)各V_iは系列を保持するVの部分集合である。
(2)任意に選ばれた２つの部分集合V_iとV_jは分離可能である。
(3)分割を形成している各部分集合の間には$V_{i_1}|V_{i_2}, V_{i_2}|V_{i_3}, \cdots, V_{i_p}|V_{i_1}$　(1≦p≦k)という分離のサイクルはしない。

ここで、半順序集合(V,≦)の切断$\mu=(A^c,A)$の上組Aの極小元の集合をγとし、これを切断μの切断決定子γと呼ぶ。切断決定子の列$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_k$で無閉路有向グラフの系列分割を表現できる。この鎖から生成される系列分割の部分集合をV_iとし、それより誘導されるDの部分グラフをブロックと呼び、$[\gamma_i, \gamma_{i+1})$で表す。また、V_iに属するすべての頂点ｖの重みw(ｖ)の総和をブロック長といい$|[\gamma_i, \gamma_{i+1})| = \sum_{v \in V_i} w(v)$と書く。一方、どのブロックにも属さないDの辺の集合をカット・セットという。カット・セットに属する辺のコストの総和は

$$f_c(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k} C([\gamma_i, \gamma_{i+1}))$$

と書き表すことができ、

$$C([\gamma_i, \gamma_{i+1})) = \sum_{\substack{v \in [\gamma_i, \gamma_{i+1}), \\ u \in P(\gamma_{i+1})}} c(v,u)\text{。}$$

最適系列分割問題は、すべての切断決定子の$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{k+1}$の集合Ωの上で、

$$\min \quad f_c(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{k+1})$$
$$\text{sub to} \quad |[\gamma_i, \gamma_{i+1})| \leq B\text{。}$$

3．Tabu Search

Tabu Search[5),6),7),8)]では、解のサイクリングを避けるためにタブーリストを設け、一部の領域への探索を禁止する処置をとる。タブーリストは以下によって構成される。

- 最近のｓ個の探索解を記憶しておき、それらを候補から除く。
- 最近のｓ個の探索解で生じた変数x_iの変化方向を記憶し、これらの変数の逆方向への変化を禁止する。

タブーリストをαとすると、Tabu Searchでは現在の解x^{now}の近傍集合$N(x^{now})$からαを除き、その中から最小コストとなる解x^{next}を選択する。その移動を行う関数を以下に示す。また近傍集合からαを除いた新たな集合を$N(\alpha, x^{now})$とする。すなわち、$N(\alpha, x^{now}) = \{N(x^{now}) - \alpha\}$となる。

$$move(x^{now}) = \begin{cases} x^{next}, & \text{if } cost(x^{next}) \leq cost(x) \text{ for all } x \in N(\alpha, x^{now}) \\ \emptyset, & \text{if } N(\alpha, x^{now}) = \emptyset \end{cases}$$

またαの長さをlengthとし、以下の算法構成でTabu Searchを記述する。

```
t := 0;
x0:= initial solution;
α := ∅;
length := a positive integer;
while stopping-criterion <> yes do begin
    xt+1 := move(xt);
    α := α ∪xt-xt-length
    t := t+1;
```

---

* Optimal Sequential Partitions of Directed Acyclic Graphs using Tabu Search.
Taichi Kaji, Azuma Ohuchi
Otaru University of Commerce, Hokkaido University

9: end;
Tabu Searchは非常に柔軟性の高い枠組みであり、上の算法はその一例である。

4．無閉路有向グラフの系列分割問題と Tabu Search

Tabu Searchの算法において近傍構造の設定が重要なポイントとなる。本問題の適用では無閉路有向グラフの系列分割をKernighanの一列化グラフの系列分割へ帰着することによって、近傍構造を構築し、その上でTabu Searchを行うこととする。まず、以下の定理等で問題の帰着可能性について述べる。さらにTabu Searchで重要である近傍構造、コスト計算、タブーリストについて述べる。

4．1 一列化グラフの最適系列分割問題と関連

無閉路有向グラフの一列化とは半順序を全順序に埋め込むことであり、図表現によるグラフ表現ではVの頂点を直線上で並べ替え、すべての辺の矢線の向きを常に右側に向くようにすることである。このようにして得られたグラフを一列化グラフと呼び、一般に複数の一列化グラフが生成される。任意に与えた無閉路有向グラフの系列分割について次の定理が成り立つ。

定理１． 無閉路有向グラフの任意の系列分割は、ある一列化による頂点の番号付けと、頂点番号の単調増加部分列を指定することによって定まる。

この定理から、無閉路有向グラフＤの最適系列分割問題の解は、Ｄから導かれたある一列化グラフに対する最適系列分割問題の解であることが導かれる。これを利用して、Ｄの最適系列分割問題の解を求めるために、"Ｄのすべての一列化グラフを列挙し、それらのすべてについて一列化グラフに対する最適系列分割問題の解を求め、その中で最良のものを解とする。"という原始的な算法を導くことができる。これを一列化にもとづく算法とよぶ。

4．2 近傍構造とコスト計算

ここでは、一列化グラフを利用しそのグラフ上での頂点の交換およびブレイク・ポイントによるカットの移動によって近傍構造を設定する。ある系列分割の任意のブレイク・ポイントｂによってグラフの切断が決定され、ｂを含む部分集合をV_i、その一つ前にある部分集合をV_{i-1}とする。ブレイク・ポイントｂに対して部分集合V_{i-1}の任意の頂点でブレイク・ポイントｂと交換可能な頂点の集合は

$B = \{ w \mid w \in V_{i-1}$、$w \le u < b$となる任意の頂点ｕの流出点ｔがすべて、$b < t$となる。$\}$

となる。この集合Ｂの中で、コストの変化量が最小となる$v \in B$とｂを交換する。このとき、交換による一列化グラフ上でのｖとｂの順序はそれぞれ互いの位置におさまるものとする。この操作をすべてのブレイク・ポイントに行うことによって、近傍集合の最小値を選択することとなる。また、ｂとｖの交換によるコストの変化量は以下となる。

$$\Delta(v,b) = \sum_{s \in V_{i-1}} c(s,v) - \sum_{t \in V_i} c(v,t) + \sum_{t \in V_i} c(b,t) - \sum_{s \in V_{i-1}} c(s,b)$$

また、ある反復回数の段階で、上記の操作で求まった可能解に対して、Kernighanの一列化グラフの最適系列分割問題の算法[1),10)]を適用し、より積極的に最適解への近似を強める。この操作はブレイク・ポイントのカットの移動による近傍構造の設定とともに、その近傍集合の最小値を求めることに一致する。この操作はO(ｎ）の計算量で求まる。

4．3 タブーリスト

上記の操作により、頂点ｘとブレイク・ポイントｂの交換が行われたとき、ブレイク・ポイントｂの頂点を用いることによってタブーリストを構成する。本算法ではタブーリスト上に存在する頂点ｗは、ｗを含む部分集合V_iの後ろにある部分集合V_{i+1}の頂点とは交換できないものとする。ただし、前にある部分集合V_{i-1}の頂点とは交換できる。タブーリストは持ち行列構造によって構成されるが、プログラム上では頂点集合に対応する１次元配列TL[]を用いる。初期化の段階でTL[]のすべての要素を０にしておき、ｖとｂの交換が成立したときTL[b]にある正の数lengthを入れ、反復毎にTL[b]＞０の値を１減ずる。以上よりTL[b]＞０のとき、ｂの頂点を禁断対象とする。

5．おわりに

今回は無閉路有向グラフの最適系列分割問題へのTabu Searchの適用についての試みについて述べた。
今後の検討課題として、長期リスト、終了判定等の導入、工夫、および数値実験などによる算法の特性についての評価を試みたい。

参考文献

1)Kernighan,B.W. : Optimal Sequential Partitions of Graphs, J.ACM, Vol.18, No.1, pp.34-40(1971).
2)Glover, F. : Tabu Search 1 , ORSA J. C. ,Vol1,No3,pp190-206(1989).
3)Glover, F. : Tabu Search 2 , ORSA J. C. ,Vol2,No1,pp4-32(1990).
4)Reeves,C.R : Mondarn Heuristic Techniqus for Combinatorial Problems, BlacjWell(1993).
5)日本ＯＲ学会第３０回シンポジウム：モダンヒューリスティクの新展開 − Gnetic Algorithm,Simulated Annealing,Tabu Search,Neural Net 法は本当に有効か−,(1994).
6)茨木:組合わせ最適化の手法−巡回セールスマン問題の例から−，電学論ｃ，Vol114,No4,pp411-419(1994).
7)久保 ： 巡回セールスマン問題への招待，日本ＯＲ,Vol39,No3,pp156-162(1994).
8)藤沢、久保、森戸 ： Tabu Searchのグラフ分割問題への適用と実験的解析，電学論ｃ， Vol114,No4,pp430-437(1994).
9)加地 ：無閉路有効グラフにおける系列分割問題の算法構成,情報処理学会第３７回全国大会講演論文集（１）,pp83-84.
10)加地，大内 ：最適系列分割問題に対する効率的分枝限定法の構築と諸特性解析，情報処理学会論文誌, Vol.35, No.3, pp.364-372(1994).