グラフのトポロジカルバンド幅と真のパス幅*

1P－2

南雲 章芳　上野 修一†
東京工業大学‡

1. まえがき グラフのトポロジカルバンド幅は行列処理，データ構造，及びVLSI設計などに応用があることが知られている [1]. グラフのトポロジカルバンド幅を求める問題は一般にはNP困難であるが [1]，入力を木に制限した場合の計算複雑度は未解決である．小文では，最大次数と真のパス幅を用いてグラフのトポロジカルバンド幅を評価し，その評価のアルゴリズム理論的側面について考察する．

2. 定義 グラフ G の点集合と辺集合をそれぞれ $V(G)$ と $E(G)$ で表す．G の点の次数の最大値を $\Delta(G)$ で表す．$\Delta(T) \leq 3$ である木 T を2分木という．G の各辺を任意の長さのパスで置き換えて得られる (G と位相同型な) グラフを G の細分という．

全単射 $\pi : V(G) \rightarrow \{1, 2, ..., |V(G)|\}$ を G の線形埋め込みという．

$d_\pi(G) = \max\{|\pi(u) - \pi(v)| \mid (u, v) \in E(G)\}$

を G の線形埋め込み π の幅といい，

$bw(G) = \min\{d_\pi(G) \mid \pi : G \text{ の線形埋め込み}\}$

を G のバンド幅という．また，

$tbw(G) = \min\{bw(G') \mid G' \text{は} G \text{の細分}\}$

を G のトポロジカルバンド幅という．定義から，$tbw(G) \leq bw(G)$ である．

$V(G)$ の部分集合の系列 $\mathcal{X} = (X_1, \ldots, X_r)$ が以下の条件を全て満たす時，$\mathcal{X}$ を G の真のパス分解といい，$|X_i| - 1$ の最大値を $\mathcal{X}$ の幅という：

- $X_i \not\subseteq X_j (i \neq j)$;
- $\bigcup_{1 \leq i \leq r} X_i = V(G)$;
- $\forall (u, v) \in E(G)\ \exists i\ (u, v \in X_i)$;
- $X_l \cap X_n \subseteq X_m (1 \leq l < m < n \leq r)$;
- $|X_l \cap X_n| \leq |X_m| - 2$
 $(1 \leq l < m < n \leq r)$.

G の真のパス分解の幅の最小値を G の真のパス幅といい，$ppw(G)$ で表す [2]. 定義から，$ppw(G) \leq bw(G)$ であることが簡単に分かる．

3. 結果 文献 [1] の結果から次の定理を導くことが出来る．

定理1：$\Delta(G) \geq 2$ である任意のグラフ G に対して，以下の不等式が成立する：

$$\max\{ppw(G), \lceil \Delta(G)/2 \rceil\} \leq tbw(G) \leq ppw(G) \lfloor \Delta(G)/2 \rfloor. \quad (1)$$

式 (1) の上界の証明は簡単ではないが，下界は簡単に証明できる．$\lceil \Delta(G)/2 \rceil \leq tbw(G)$ であることは自明であろう．G' を $bw(G') = tbw(G)$ であるような G の細分とするとき，

$$ppw(G) \leq ppw(G') \leq bw(G') = tbw(G)$$

であるので，(1) の下界を得る．

式 (1) の下界は次の定理2に示すように最良である．式 (1) の上界が一般に最良であるか否かは未解決であるが，G が木である時には式 (1) の上界は以下のように改善できる．

定理2：任意の木 T に対して，以下の不等式が成立する：

$$\max\{ppw(T), \lceil \Delta(T)/2 \rceil\} \leq tbw(T) \leq (ppw(T) - 1)\lfloor \Delta(T)/2 \rfloor + 1. \quad (2)$$

さらに，式 (2) の上，下界は最良である．すなわち，トポロジカルバンド幅が式 (2) の上界に一致する木と下界に一致する木が存在する．

式 (2) の上界の証明は，$ppw(T)$ に関する数学的帰納法によって構成的に行なわれるが，詳細は省略する．

トポロジカルバンド幅が式 (2) の上界に一致する木と下界に一致する木は以下のようにして構成できる．

木 U_k^n を以下のように再帰的に定義する：(I) $U_k^0 = K_2$; (II) U_k^{n-1} が定義されている時，

---

*The Topological Bandwidth and Proper Pathwidth of Graphs

†Akiyoshi Nagumo and Shuichi Ueno

‡Tokyo Institute of Technology

$K_{1,k}$の次数が1である各点vに2個のU_k^{n-1}を付加し，それらの次数が1である任意の一点とvをそれぞれ辺で結んで得られる木はU_k^nである．このとき，$ppw(U_k^n) = n+1, \Delta(U_k^n) = k$,及び$tbw(U_k^n) = n\lfloor k/2 \rfloor + 1$であることが証明できる．従って，$tbw(U_k^n)$は式(2)の上界に一致する．

高さhの完全2分木のレベル$h-1$の最も左の点uと最も右の点vにそれぞれ$k-3$個の点を新たに付加し，それぞれuとvに辺で結んで得られる木をL_k^hとする．このとき，$\Delta(L_k^h) = k, ppw(L_k^h) = \lfloor h/2 \rfloor + 1$,及び$tbw(L_k^h) = \max\{\lfloor h/2 \rfloor + 1, \lceil k/2 \rceil\}$であることが証明できる．従って，$tbw(L_k^h)$は式(2)の下界に一致する．

4. 考察　一般に，$ppw(G)$を求める問題はNP困難であるので，式(1)の上，下界は多項式時間で計算できない．$\Delta(G) \leq 3$ならば，式(1)から$tbw(G) = ppw(G)$であることが分かる．しかし，$\Delta(G) \leq 3$であるグラフGに対しても，$tbw(G)$あるいは$ppw(G)$を求める問題はNP困難であることが知られている[1].

一方，任意の定数kに対して，$tbw(G) \leq k$であるか否かの判定は$O(|V(G)|^k)$時間でできることが知られているので[1]，次の定理を得る．

定理3：$\Delta(G)$と$ppw(G)$が共に定数で制限されているグラフGの$tbw(G)$は多項式時間で求められる．

$ppw(G)$が定数で制限されているグラフGに対しては，文献[3]の方法を用いて式(1)の上界の幅でGの細分を線形に埋め込む多項式時間のアルゴリズムを構成できる．従って，次の定理を得る．

定理4：$ppw(G)$が定数で制限されているグラフGに対しては，定数の近似比で$tbw(G)$を近似する多項式時間近似アルゴリズムが存在する．

任意の木Tに対して$ppw(T)$は線形時間で計算できるので[4], 式(2)の上,下界は線形時間で計算できる．

2分木Tに対しては，式(2)から$tbw(T) = ppw(T)$であり，$ppw(T)$は線形時間で求められることから次の定理を得る．

定理5：2分木Tの$tbw(T)$は線形時間で求められる．

これは文献[5]の結果の別証明になっている．

$ppw(T) \leq 2$ならば，式(2)から$\lceil \Delta(T)/2 \rceil \leq tbw(T) \leq \lfloor \Delta(T)/2 \rfloor + 1$であるので，可能な$tbw(T)$の値は高々二つしかない．実際，次の定理が知られている．

定理6：$ppw(T) \leq 2$である木Tの$tbw(T)$は線形時間で求められる[6].

式(2)の上界の証明は構成的であり，幅$d_\pi(T')$が高々式(2)の上界であるようなTの細分T'の線形埋め込みπを多項式時間で構成する．このことから，次の定理を得る．

定理 7：$ppw(T)$あるいは$\Delta(T)$が定数で制限されている木Tに対しては，定数の近似比で$tbw(T)$を近似する多項式時間近似アルゴリズムが存在する．

謝辞: 日頃御指導頂く梶谷洋司教授に感謝する．また，多くの貴重な御助言を頂いた高橋篤司助手に感謝する．

参考文献

[1] Makedon, F., C. H. Papadimitriou, and I. H. Sudborough. Topological Bandwidth. *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, Vol. 6, No. 3, pp. 418–444, 1985.

[2] Takahashi, A., S. Ueno, and Y. Kajitani. Minimal acyclic forbidden minors for the family of graphs with bounded path-width. *Discrete Mathematics*, Vol. 127, pp. 293–304, 1994.

[3] Makedon, F. and I. H. Sudborough. On Minimizing Width in Linear Layouts. *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 23, pp. 243–265, 1989.

[4] Takahashi,A., S. Ueno, and Y. Kajitani. On the Proper-Path-Decomposition of Trees. Tech. Report CAS 91–74, IEICE, 1991.

[5] Miller, Z. A Linear Algorithm for Topological Bandwidth in Degree-Three Trees. *SIAM J. Computing*, Vol. 17, pp. 1018–1034, 1988.

[6] 中村 泉之. グラフのトポロジカルバンド幅に関する研究. 卒業論文, 東京工業大学, 1992.