1G－3

逐次正規化戦略アルゴリズム

大崎人士　井田哲雄
筑波大学

概要

準正交な (almost orthogonal) 項書換え系には, 正規化戦略が存在することが理論的に示されている [1]. 実際に, 簡約位置の決定アルゴリズムを用いた逐次的な正規化戦略の方法は提案されている [2]. この方法は, 項の長さに基づいて, 簡約経路に含まれる巡経路を探索する. しかし, ここでの簡約位置の決定アルゴリズムは, 実行効率を極めて低下させる. そこで, 簡約位置の計算に環境を用いることで, 巡経路探索での不要計算を回避をさせ, 計算量を減少させることを可能にする.
キーワード：項書換え, 正交項書換え系, 逐次正規化戦略, 停止性, 効率化

1　はじめに

正規化戦略とは, ある項 t を書換えて正規形を求めるための手続きである. 逐次正規化戦略 (逐次戦略と略す) とは, さらに並列評価しないことを条件に加える. 逐次戦略の手続きは項 t を入力とすると, 一回の簡約に相当する t の簡約位置 p とその簡約規則 $l \to r$ が出力となる. 一般に, すべての項書換え系を対象とするような正規化戦略は存在しない. したがって, 逐次戦略の能力の強さは, 正規化可能な書換え系のクラスの大きさで示すことができる. まず, 本節では, 準正交な項書換え系の正規化戦略である逐次戦略 $\mathcal{S}_\omega$ と, その問題点について述べる.

1.1　巡経路探索

ある逐次戦略を $\mathcal{S}$ とする. このとき, 正規形でない項 t は, 逐次戦略 $\mathcal{S}$ による書換えで, 巡経路 $t \xrightarrow[\mathcal{S}]{+} t$ をたどる可能性がある. 一般には, 項 t が巡経路を持つかどうかは決定不可能である. しかし, $\mathcal{S}$ による簡約で, すべての項のサイズが n 以下であるような巡経路 $t \xrightarrow[\mathcal{S}]{+} t$ が存在するかどうかは, 決定可能である. この決定手続きを大きさ n 以下の $\mathcal{S}$ 巡経路探索、または単に巡経路探索と呼ぶことにする. 巡経路を探索するためのアルゴリズムは, 表1に示す [2]. このアルゴリズムでは, 項 t が逐次戦略 $\mathcal{S}$ で, 大きさ n 以内の項からなる簡約経路に, 巡経路 $t \xrightarrow[\mathcal{S}]{+} t$ が存在すれば true を返し, それ以外では false を返すことで巡経路を検出している.

1.2　逐次正規化戦略 $\mathcal{S}_\omega$

逐次正規化戦略 $\mathcal{S}_\omega$ は, 巡経路探索に cyclic$(t,|t|,\mathcal{S})$ を適用しながら, 簡約の位置を決定していく. この手続きを表2に示す. 例えば, 書換え系

$$\mathcal{R}_1 = \left\{ \begin{array}{r} \mathrm{or}(T,x) \to T \\ \mathrm{or}(x,T) \to T \\ \mathrm{or}(\bot,\bot) \to \bot \\ \infty \to \infty \end{array} \right\}$$

と項 $t = \mathrm{or}(\mathrm{or}(\bot,\infty),\mathrm{or}(\infty,\mathrm{or}(\bot,T)))$ を与える. このとき, t に対して, 逐次戦略 $\mathcal{S}_\omega$ を適用して簡約を行なうと,

$$t \to_{\mathcal{S}_\omega} \mathrm{or}(\mathrm{or}(\bot,\infty),\mathrm{or}(\infty,T)) \to_{\mathcal{S}_\omega} \mathrm{or}(\mathrm{or}(\bot,\infty),T) \to_{\mathcal{S}_\omega} T$$

のように, 正規形 T を得る. ただし, 上記の $\to_{\mathcal{S}_\omega}$ という記号は, 逐次戦略 $\mathcal{S}_\omega$ による一回の簡約を表している. この戦略は, 準正交な項書換え系に対して, 正規化戦略である [2]. 準正交な項書換え系とは, 自明な重なりを許した正交項書換え系のことである. しかし, この戦略が, 実用的な正規化戦略であるためには, 巡経路の探索をいかに効率よく行なえるかが問題である.

$$\mathrm{cyclic}(t,n,\mathcal{S}) = \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{false} & \text{if } |t| > n \text{ or } t \in NF(\mathcal{R}) \\ \varphi(t,n,\mathcal{S},\phi,t') & \text{if } |t| \le n \text{ and } t \to_{\mathcal{S}} t' \end{array} \right.$$

$$\varphi(t,n,\mathcal{S},T,t') = \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{true} & \text{if } t' = t \\ \mathrm{false} & \\ \quad \text{if } |t'| > n,\ t' \in NF(\mathcal{R}), \text{ or } t' \in T & \\ \varphi(t,n,\mathcal{S},T \cup \{t'\},t'') & \\ \quad \text{if } |t'| \le n,\ t' \notin T \cup \{t\}, \text{ and } t' \to_{\mathcal{S}} t'' & \end{array} \right.$$

表 1: 巡経路探索アルゴリズム

2　効率化手法

逐次戦略 $\mathcal{S}_\omega$ では, 一回の簡約位置の計算手続きで求めた結果を保存しておくことはできない. つまり, 以前の計算結果を継承しないので, 同じ項に巡経路探索の手続きを行なう場合がある. そして, 既に, ある項 t が巡経路を持つことが分かっているような場合でも, 同じ手続きを繰り返さなければならない. このため, 次の合流性をもつ書換え系

$$\mathcal{R}_2 = \left\{ \begin{array}{r} a \to b \\ b \to a \\ c \to c \\ f(b,x) \to d \end{array} \right\}$$

と項 $f(a,c)$ のような例を考える. すると, 以下のように

$$f(a,c) \to_{\mathcal{S}_\omega} f(a,c) \to_{\mathcal{S}_\omega} f(a,c) \to_{\mathcal{S}_\omega} \cdots \infty$$

簡約して, 正規形にたどりつくことが出来ない. 本稿では, こうした問題解決の糸口として, 書換え系を拡張した環境付き項書換え系と, その逐次正規化戦略を提案する.

2.1　環境

環境は, 逐次戦略の非効率化を回避し, 正規化可能な書換え系のクラスを拡張するために導入する. この環境は, 一回の簡約ごとに更新されていくものとする. したがって, 環境付き項書換え系では, 項と環境の対の書換えを簡約と呼ぶ.

定義 2.1 書換え系 $\mathcal{R}$ を与える. T_n を大きさ n 以内で $\mathcal{S}$ 巡回する項の集合とする. このとき環境 E は,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \{ \langle t,i \rangle \mid t \in T_i \}$$

の部分集合のことである. □

$$\mathcal{S}_\omega(t) = \begin{cases} \epsilon & \text{if } |t| = 1 \quad \cdots (1) \\ \epsilon & \text{if } t = f(s_1,\cdots,s_n) \text{ and } t \text{ is redex} \quad \cdots (2) \\ \pi(i)\cdot\mathcal{S}_\omega(s_{\pi(i)}) & \cdots (3) \\ & \text{if } t = f(s_1,\cdots,s_n) \text{ and } t \text{ is not redex} \end{cases}$$

式 (3) の条件:
$M = \{1,\cdots,m\}$, $N = \{1,\cdots,n\}$ とし,

- $s_{\pi(i)}$ は, 可簡約項. (写像 $\pi : M \to N$ は, 単射である.)
- $|s_{\pi(1)}| \le |s_{\pi(2)}| \le \cdots \le |s_{\pi(m)}|$
- $|s_{\pi(i)}| = |s_{\pi(j)}|$ かつ $i \le j \implies \pi(i) < \pi(j)$

という $s_{\pi(i)}$ について, $\mathrm{cyclic}(s_{\pi(i)}, |t|, \mathcal{S})$ が false になる最小の i が引数の値となる.

表 2: 逐次正規化戦略 $\mathcal{S}_\omega$

$\mathrm{expand}(f(s_1,\cdots,s_n), E)$

$$= \begin{cases} p & \text{if } \{t' | f(\overset{\odot}{s_1},\cdots,\overset{\odot}{s_n}) \to_{\mathcal{S}} t'\} \not\subseteq E \cup \{f(\overset{\odot}{s_1},\cdots,\overset{\odot}{s_n})\} \\ & \text{where } p \text{ is the leftmost-outermost needed} \\ \mathcal{S}(f(s_1,\cdots,s_n)) & \\ & \text{if } \{t' | f(\overset{\odot}{s_1},\cdots,\overset{\odot}{s_n}) \to_{\mathcal{S}} t'\} \subseteq E \cup \{f(\overset{\odot}{s_1},\cdots,\overset{\odot}{s_n})\} \end{cases}$$

表 3: 要簡約位置の決定手続き

また, 本稿で提案する戦略の正規化可能な書換え系のクラスを拡張する準備として, 項の膨張という概念を導入する.

定義 2.2 $\mathcal{S}$ をある逐次戦略, t を可簡約項, E を環境とする. このとき $n = |t|$ ならば, $\mathcal{S}$ および E に関する項 t の膨張 $\odot(t)$ は, 以下に帰納的に定義する.

$$\forall p \in \mathcal{P}os(t) \text{ s.t. } [\mathrm{cyclic}(t_{|p}, n, \mathcal{S}) = \text{true, or } \exists m.\langle t_{|p}, m\rangle \in E],$$
$$\odot(t) = \{t[t']_p\} \cup \odot(t[t']_p) \quad \text{where } t_{|p} \xrightarrow{+}_{\mathcal{S}} t' \xrightarrow{*}_{\mathcal{S}} t_{|p}$$

したがって, 項の膨張 $\odot(t)$ とは, t で始まる大きさ $|t|$ 以下の $\mathcal{S}$ 巡経路群に出現する項の集合, および環境によって自明な $\mathcal{S}$ 巡回する項の集合のことである. ただし, $\overset{\odot}{t}$ という表記は, $\odot(t)$ のある一つの要素を表すものとする.

さらに, $\mathcal{S}$ に関する項 t の膨張 $\circlearrowleft(t)$ も, 帰納的に定義する.

$$\circlearrowleft(t) = \{t' \mid p \in \mathcal{P}os(t), \mathrm{cyclic}(t_{|p}, n, \mathcal{S}) = \text{true}, \text{ and } t_{|p} \xrightarrow{+}_{\mathcal{S}} t' \xrightarrow{*}_{\mathcal{S}} t_{|p}\}$$

項の膨張 $\circlearrowleft(t)$ とは, 大きさ $|t|$ 以下で $\mathcal{S}$ 巡回する t のすべての部分項 $t_{|p}$ が, $\mathcal{S}$ 簡約で到達可能な項の集合のことである. □

2.2 改良アルゴリズム

表 4 には, 拡張逐次戦略 $\mathcal{S}^+_\omega$ の簡約手続きを示す. また, 表 3 は, 項 t の逐次戦略 $\mathcal{S}$ および環境 E に関する必要簡約位置 (needed redex position) を決定する手続きを示している. 次の例 2.3 には, 拡張逐次戦略 $\mathcal{S}^+_\omega$ による簡約例を表す.

$\mathcal{S}^+_\omega(t, E)$

$$= \begin{cases} \mathcal{S}_\omega(t), E' & \text{if } \forall n.n \ge |t_{|\mathcal{S}_\omega(t)}|, \langle t_{|\mathcal{S}_\omega(t)}, n\rangle \notin E, \text{ and} \\ & \quad \mathrm{cyclic}(t, |t|, \mathcal{S}_\omega) = \text{false}, \\ & \text{where } E' = E \cup \{\langle t', |t|\rangle \mid t' \in \circlearrowleft(t)\} \\ \mathcal{L}(t, E) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$\mathcal{L}(t, E)$

$$= \begin{cases} \epsilon, E' & \text{if } |t| = 1 \\ & \text{where } E' = E \cup \{\langle t', |t|\rangle \mid t' \in \circlearrowleft(t)\} \\ \mathrm{expand}(t, E'), E' & \text{if } t = f(s_1,\cdots,s_n) \\ & \text{where } E' = E \cup \{\langle t', |t|\rangle \mid t' \in \circlearrowleft(t)\} \end{cases}$$

表 4: 拡張逐次戦略 $\mathcal{S}^+_\omega$

例 2.3 書換え系

$$\mathcal{R}_3 = \left\{ \begin{array}{c} a \to b \\ b \to c \\ c \to a \\ f(a,b) \to f(b,a) \\ f(b,a) \to f(a,b) \\ f(c,a) \to d \end{array} \right\}$$

と, 項 $f(a,a)$ を与える. このとき拡張逐次戦略 $\mathcal{S}^+_\omega$ による $f(a,a)$ の簡約では, 簡約経路は以下のようになる. ただし, 簡約経路中の項との対となる環境は, 省略してある.

$$f(a,a) \to_{\mathcal{S}^+_\omega} f(b,a) \to_{\mathcal{S}^+_\omega} f(c,a) \to_{\mathcal{S}^+_\omega} d$$

項 d は, 書換え系 $\mathcal{R}_3$ における正規形である. もし $f(a,a)$ を逐次戦略 $\mathcal{S}_\omega$ で簡約していくと, 簡約経路は以下のようになる.

$$f(a,a) \to_{\mathcal{S}_\omega} f(a,b) \to_{\mathcal{S}_\omega} f(b,a) \to_{\mathcal{S}_\omega} f(a,b) \to_{\mathcal{S}_\omega} \cdots \infty$$

逐次戦略 $\mathcal{S}_\omega$ では, $f(c,a)$ 以外の簡約項で正規形を得ることはできない.

3 おわりに

本稿では, 環境を用いた項書換え系の正規化戦略について述べた. この戦略がどのクラスの項書換え系に対して正規化戦略であるかは, まだ分かっていない. しかし, 環境からもたらされる情報によって, これまで正規化可能であった項書換え系のクラスをさらに拡張できることは確かである. したがって, 今後は, 環境付き項書換え系の拡張逐次戦略の有効性について研究する予定である.

参考文献

[1] J.R. Kennaway, Sequential Evaluation Strategies for Parallel-Or and Related Reduction Systems, Annals of Pure and Applied Logic *43*, pp.31-56, 1989.

[2] S. Antoy, and A. Middeldorp, A Sequential Reduction Strategy, *Draft*, Oct., 1993.

[3] G. Huet and J.J.Lèvy, Computation Orthogonal Rewriting Systems *I*, *II*, in "Computational Logic, Essays in Honor of Alan Robinson", eds. J.-L.Lassez, G.Plotkin, MIT Press, 1991. Previous version: Call by Need Computations in Non-Ambiguous Linear Term Rewriting Systems, Report 359, INRIA, 1979.

[4] J.W. Klop, and A.Middeldorp, Sequentiality in Orthogonal Term Rewriting Systems, Journal of Symbolic Computation *12*, pp.161-195, 1991.