3N−2

IEMSAT アルゴリズムの実験的評価*

山本雅人 † 　大柳俊夫 ‡ 　大内　東 †

† 北海道大学工学部　　‡ 札幌医科大学保健医療学部

1　はじめに

命題論理式の充足可能性問題 (SAT) は，情報処理の分野における基本的な問題の一つである．著者らは，SAT に対する解法として IEMSAT を提案している [1]．IEMSAT は，$0-1$ 整数計画問題を解くための陰的列挙法に基づいたアルゴリズムである．さらに，著者らは IEMSAT と Davis-Putnam の方法との密接な関係も明らかにしている．本稿では，IEMSAT を様々な問題に適用することでその特徴および有効性を明らかにする．

2　SAT と 0 − 1 整数計画問題

2.1　SAT

SAT は，m 個の節からなる節集合 $S=\{C_1,\cdots,C_m\}$ に対して，すべての節を真とする n 個の変数 x_j $(1\le j\le n)$ への真理値の割当てが存在するかどうかを決定する問題である．ただし，各 C_i $(1\le i\le m)$ は，変数 x_j かまたはその否定の選言からなるとする．

2.2　0 − 1 整数計画問題

SAT は，以下のような $0-1$ 整数計画問題に定式化できることが知られている．[2]

$$\begin{array}{ll} \min & x_0 \\ \text{sub.to} & x_0\boldsymbol{e}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\ge\boldsymbol{b}, \\ & x_0\in\{0,1\},\boldsymbol{x}\in\{0,1\}^n, \end{array}$$

ただし，$\boldsymbol{e}$ はすべての成分が 0 の m 列ベクトル，$\boldsymbol{A}$ は，$m\times n$ の行列，$\boldsymbol{b}$ は m 列ベクトルである．

従って，SAT を解くことは $x_0=0$ となる解が存在するかどうかを調べることと等価である．

3　IEMSAT

3.1　諸定理

以下は，IEMSAT で用いる基本的な定理である．なお，用いられている記号は，文献 [1][3] に基づいている．

定理 1 $b_i^k\le 0,\forall i\in M^k$ かまたは，$M^k=\phi$ なら，$\boldsymbol{x}^k$ の 0−完備解は，$x_0=0$ となる実行可能解である．

定理 2 $s_i<0$ となる i が存在するなら，$\boldsymbol{x}^k$ の完備解の中に，$x_0=0$ となる解は存在しない．ただし，$s_i=\sum_{j\in N-J^k}\max\{0,a_{ij}\}-b_i^k$ である．

定理 3 $\tilde{\boldsymbol{x}}^k$ を $x_0=0$ である $\boldsymbol{x}^k$ の実行可能完備解であるとする．このとき，$i\in R$, $h\in N-J^k$ に対して，$a_{ih}=1$ ならば $\tilde{x}_h^k=1$，$a_{ih}=-1$ ならば $\tilde{x}_h^k=0$ でなければならない．ただし，$R=\{i\in M^k|s_i=0\}$ である．

系 4 $\boldsymbol{x}^k$ の完備解が $x_0=0$ となるためには，$x_j=1$, $\forall j\in Q_+^k$，$x_j=0$, $\forall j\in Q_-^k$ を満たさなければならない．従って，$Q_+^k\cap Q_-^k\ne\phi$ ならば，$\boldsymbol{x}^k$ の完備解で実行可能なものは存在しない．ただし，

$$Q_+^k=\{h\in N-J^k|a_{ih}=1,i\in R\},$$
$$Q_-^k=\{h\in N-J^k|a_{ih}=-1,i\in R\}.$$

である．

定理 5 $\boldsymbol{x}^k$ に対して成り立つ制約式は，$\boldsymbol{x}^k$ のすべての完備解について成り立つから，新しい部分問題においてその制約式を取り除くことができる．

定理 6 部分問題 P_k のある自由変数 x_k に対し，

$$a_{ik}=1 \text{ もしくは } a_{ik}=0\quad \forall i\in M^k, \tag{1}$$

または，

$$a_{ik}=-1 \text{ もしくは } a_{ik}=0\quad \forall i\in M^k. \tag{2}$$

であれば，x_k を含む制約式を P_k から取り除くことができる．このとき，x_k の値は (1) 式が成り立てば 1，(2) 式が成り立てば 0 とする．

---

*Empirical Evaluation of IEMSAT Algorithm
Masahito YAMAMOTO and Azuma OHUCHI
Faculty of Engineering, Hokkaido University
Toshio OHYANAGI
School of Health Sciences, Sapporo Medical University

3.2 IEMSAT

図1はIEMSATアルゴリズムを示している．ただし，定理6で示した制約式の削除は除いている．

S1: $P \leftarrow \phi$;
S2: $k \leftarrow 1$;
S3: $P_k \leftarrow$ 元問題;
S4: P_k より削除可能な制約式を削除する;
S5: **while** (P_k の 0−完備解が実行可能でない) **do begin**
S6:   **if** (x_kの実行可能な完備解が存在する可能性がある) **then**
S7:   **if** (固定しなければならない自由変数が存在する) **then begin**
S8: $Q \leftarrow$ 変数を固定することで生成される部分問題;
S9: $P \leftarrow P \cup \{Q\}$;
S10:   **end else begin**
S11:   自由変数 y を選ぶ;
S12: $Q_1 \leftarrow y = 0$ を部分解に加えた部分問題;
S13: $Q_2 \leftarrow y = 1$ を部分解に加えた部分問題;
S14: $P \leftarrow P \cup \{Q_1\} \cup \{Q_2\}$;
S15:   **end**;
S16:   **if** ($P \neq \phi$) **then begin**
S17: $k \leftarrow k + 1$;
S18:   ある部分問題 P_k を P から選択する;
S19: $P \leftarrow P - \{P_k\}$;
S20:   **end else**
S21: S 充足不能である (終了);
S22: **end**;
S23: S は充足可能である (終了);

図1： IEMSATアルゴリズム．

4 実験

IEMSATの特徴を明らかにするために，IEMSATを様々な問題に適用し，Davis-Putnamの方法(DP)や，GSATなどと比較する[4]．適用する問題は，DIMACSが公開している問題やランダム問題などを用いる．実験結果および考察については当日発表する．以下では，DP，GSATの概略について述べる．

4.1 Davis-Putnam

SATに対する伝統的な方法であるDavis-Putnamの方法(DP)は本質的に，1リテラル規則，分割規則を繰り返し用いる[5][6]．他に，トートロジー規則や純リテラル規則などもあるが，これらは用いない．1リテラル規則がIEMSATにおける定理3，定理5に対応すること，分割規則がIEMSATにおける部分問題の生成に対応することなどは文献[1]で述べられている．

4.2 GSAT

GSATは，Selmanらによって提案された方法である[7]．この方法では，変数に対してランダムに0, 1の値を与え，充足する節が多くなるようにある変数の値の補数をとることを繰り返して解を求めようとする．文献[7]では充足可能な節集合に対してかなり有効な方法であることが示されている．しかし，この解の探索は局所的になるため，節集合が充足不能であることを証明することはできない．従って，完全ではない方法である．

5 おわりに

本稿では，SATを解くための方法であるIEMSATの概略について述べ，その特徴を明らかにするためにさまざまな問題に対して適用する実験を試みた．また，DP，GSATなどSATに対する他の方法との比較も行った．

参考文献

[1] 大柳，山本，大内： 陰的列挙法に基づくSATアルゴリズム．情報処理学会論文誌, Vol. 34, No 12, pp. 2464–2473 (1993).

[2] Hooker, J. N. : A Quantitative Approach to Logical Inference. *Decision Support Systems*, Vol. 4, pp. 45–69 (1988).

[3] 今野： 整数計画法．講座 数理計画法 6, 産業図書 (1981).

[4] Mitchell, D., Selman, B., and Levesque, H. : Hard and Easy Distributions of SAT Problems. *Proceedings of AAAI-93*, pp. 459–465 (1992).

[5] Davis, M., and Putnam, H. : A Computing Procedure for Quantification Theory. *Journal of the ACM*, Vol. 7, pp. 201–215 (1960).

[6] Chang, C.-L., and Lee, R. C. -T., : Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving. *ACADEMIC PRESS* (1973).

[7] Selman, B., Levesque, H., and Mitchell, D. : A New Method for Solving Hard Satisfiability Problems. *Proceedings of AAAI-92*, pp. 440–446 (1992).