陰的列挙法に基づくβ SAT アルゴリズム

3N－1

大柳　俊夫[†]　　山本　雅人[‡]　　大内　東[‡]

[†]札幌医科大学保健医療学部　[‡]北海道大学工学部

1. はじめに

命題論理の充足可能性問題 (SAT) は, 情報処理の分野における基本的な問題の一つで, 現在まで多くの研究が行われている. 一方, SAT の各節に量的な条件を加え, SAT を一般化した一般化SAT問題 (βSAT と呼ぶ) の研究が最近 Hooker によって行われている[1]. βSAT は, SAT の各節で真となるリテラルが少なくとも 1 つであることを, 少なくともβ個のリテラルが真となるような問題に一般化したものである.

本稿では, βSAT とその 0–1 整数計画問題への定式化, ならびに SAT に対して著者らが提案した陰的列挙法に基づくアルゴリズム (IEMSAT)[2]をβSAT 向きに見直したアルゴリズム (IEMBSAT) を提案する. また, βSAT をそれと等価な SAT へ変換するアルゴリズムを示す.

2. βSAT と 0–1 整数計画問題

βSAT は,

$$BS = \{C_1(\beta_1), C_2(\beta_2), \cdots, C_m(\beta_m)\}, \qquad (1)$$

として与えられ, すべての節C_i $(i = 1, \cdots, m)$ に対し, C_i中で少なくともβ_i個のリテラルを真とする原子論理式p_j $(j = 1, \cdots, n)$ への真偽の割り当てが存在するか否かを調べるものである. 一般に$C(\beta)$を, β–節もしくは位数βの節と呼ぶ. β–節において少なくともβ個のリテラルが真であるとき, そのβ–節は真であるという. そして, BSにおいてすべてのβ–節を真とする原子論理式p_j $(j = 1, \cdots, n)$ への真偽の割り当てが存在するとき, BSは充足可能であるという.

(1) 式のあるβ–節 ($C_i(\beta_i)$) は, 一次不等式

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq \beta_i - n(a_{i\cdot}) \qquad (2)$$

と表される. ここでx_iは, β–節 中の原子論理式p_iが真のとき 1, 偽のとき 0 となる 0–1 変数, a_{ij}は, C_i中で原子論理式p_iが現れるとき 1, $\neg p_i$が現れるとき-1, 現れないとき 0 となる係数である. また, $c(a_{i\cdot})$ はC_i中の負のリテラルの個数である.

そして, (2) 式の左辺に 0–1 変数x_0を導入して, 項$\beta_i x_0$を加えた一次不等式,

$$\beta_i x_0 + a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq \beta_i - n(a_{i\cdot}) \qquad (3)$$

を考える. この不等式は, x_0の値を 1 にすると, 他の 0–1 変数の値によらず満足されることになり, x_0の値を 0 にすると, 不等式 (2) と等しくなる. このことは, β –節 $C_i(\beta_i)$ にx_0に対応する正のリテラルp_0をβ_i個加えた新しいβ–節 を

$$C_i'(\beta_i) = \underbrace{p_0 \vee \cdots \vee p_0}_{\beta_i 個} \vee l_{i1} \vee l_{i2} \vee \cdots \vee l_{in}(\beta_i), \qquad (4)$$

としたとき, このβ–節 の真偽は, p_0を真に割り当てると他の原子論理式の真偽によらず真となり, 偽とすると β–節 $C_i(\beta_i)$ の真偽と等しくなることに対応する.

以上の考えを, (1) 式中のすべてのβ–節に適用すると, (1) 式のβSAT は, 0–1 整数計画問題

$$\{\min x_0 | \beta_0 x_0 \mathbf{e} + \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, (x_0, \mathbf{x}) \in \{0,1\}^{n+1}\}, \qquad (5)$$

と定式化できる. ここで, $\beta_0 = \max(\beta_1, \cdots, \beta_m)$, $\mathbf{e}$ はすべての成分が 1 である m 列ベクトル, $\mathbf{A}$ は $m \times n$ 行列, そして $\mathbf{b}$ は m 列ベクトルである.

3. IEMBSAT で用いる諸定理

βSAT と 0–1 整数計画問題の間には, 「(1) 式のβSAT が充足可能であればまたそのときに限り, $x_0 = 0$ となる実行可能解が (5) 式に存在する.」という関係がある. そこで IEMBSAT では, 以下の諸定理を用いて $x_0 = 0$ となる実行可能解の探索を行う.

ここで, 定理5,6の制約式の除去において, 以下で定義される充足度を用いている点がIEMSAT と大きく異なる. アルゴリズム全体の流れは, IEMSAT と IEMBSAT で大きな差はない.

[定義] (充足度)

部分問題P_k中の各制約式 $i \in M^k$ に対し,

$$d_i^k = |\{j | \quad a_{ij} = 1 \wedge x_j^k = 1 \text{ もしくは } a_{ij} = -1 \wedge x_j^k = 0, j \in J^k\}|, \qquad (6)$$

β SAT Algorithm based on Implicit Enumeration Method

Toshio Ohyanagi[†], Masahito Yamamoto[‡] and Azuma Ohuchi[‡]

[†]Spporo Medical University, Minami 3, Nishi 17, Sapporo 060, Japan

[‡]Hokkaido University, Kita 13, Nishi 8, Sapporo 060, Japan

を制約式の充足度と呼ぶ.

[定理 1] (実行可能解の存在に関する定理)

部分問題 P_kにおいて, $b_i^k \leq 0, \forall i \in M^k$ または $M^k = \phi$ ならば, 部分解 $\mathbf{x}^k$の 0–完備解は, $x_0 = 0$ となる実行可能解である.

[定理 2] (実行可能解の非存在に関する定理)

部分問題 P_kにおいて, $s_i < 0$ となる $i \in M^k$ が存在すれば, $\mathbf{x}^k$ の完備解の中に $x_0 = 0$ となる実行可能解は存在しない. ただし, $s_i = \sum_{j \in N-J^k} \max\{0, a_{ij}\} - b_i^k$, である.

[定理 3] (自由変数の値に関する定理)

$\tilde{\mathbf{x}}^k$を $x_0 = 0$ となる実行可能な $\mathbf{x}^k$の完備解とする. このとき, $i \in R, h \in N - J^k$ に対して, $a_{ih} = 1$ ならば$\tilde{x}_h^k = 1, a_{ih} = -1$ ならば $\tilde{x}_h^k = 0$ でなくてはならない. ただし, $R = \{i \in M^k | s_i = 0\}$, である.

[定理 4] (実行可能解の非存在に関する系)

$\mathbf{x}^k$の完備解で, $x_0 = 0$ となる実行可能解は, $x_j = 1, \forall j \in Q_+^k$; $x_j = 0, \forall j \in Q_-^k$ をみたさなくてはならない. したがって, $Q_+^k \cap Q_-^k \neq \phi$ ならば$\mathbf{x}^k$の完備解で実行可能なものは存在しない. ただし, $Q_+^k = \{h \in N - J^k | a_{ih} = 1, i \in R\}, Q_-^k = \{h \in N - J^k | a_{ih} = -1, i \in R\}$, である.

[定理 5] (制約式の除去に関する定理 (1))

部分問題 P_kの自由変数の値を固定して新しい部分問題を生成する際に, ある制約式において係数が 1 の自由変数の値を 1 に固定するか, もしくは係数が−1 の自由変数を 0 に固定するのであれば, 固定後その制約式の充足度は 1 増加する. そして, その値が制約式の位数以上であれば, その制約式は他の自由変数の値によらず常に成り立つことになり, 新しい部分問題において取り除くことができる.

[定理 6] (制約式の除去に関する定理 (2))

部分問題 P_kのある自由変数 x_kに対し,

$$a_{ik} = 1 \text{ もしくは } a_{ik} = 0 \quad \forall i \in M^k, \tag{7}$$

または,

$$a_{ik} = -1 \text{ もしくは } a_{ik} = 0 \quad \forall i \in M^k, \tag{8}$$

であれば, x_kの値を, (7) 式が成り立てば 1, (8) 式が成り立てば 0 に固定することができる. その結果, その制約式の充足度は 1 増加し, その値が制約式の位数以上であれば, その制約式は他の自由変数の値によらず常に成り立つことになり, 取り除くことができる.

4. βSAT から SAT への変換

Hooker は, β–節はそれと等価な節集合でおきかえることができることを示唆している. 例えば,2–節 $l_1 \vee l_2 \vee l_3(2)$ は, 節集合 $\{ l_1 \vee l_2, l_2 \vee l_3, l_1 \vee l_3 \}$ と等価である. つまり,$l_1 \vee l_2 \vee l_3(2)$ が充足可能

Step 1: n 個のリテラルから$\beta - 1$ 個のリテラルを選ぶ.

Step 2: n 個のリテラルから選ばれた$\beta - 1$ 個のリテラルを除き, $n - \beta + 1$ 個のリテラルで 1 つの節を作り節集合へ加える.

Step 3: n 個のリテラルから$\beta - 1$ 個のリテラルを選ぶ他の組合せが存在すればその組合せを 1 つ選び Step 2:へ戻る. さもなければ, 終了する.

図 1: β–節から節集合への変換アルゴリズム

のとき, またそのときに限り $\{ l_1 \vee l_2, l_2 \vee l_3, l_1 \vee l_3 \}$ は充足可能である.

Hooker の文献 1) では, β–節 から節集合への変換はこの例が示されているだけで, 一般的な手続きは説明されていない. また, β–節から節集合への変換アルゴリズムはいままで明らかにされていないと考えられる.

そこで,β–節 $l_1 \vee \cdots \vee l_n(\beta)$ を節集合へ変換するアルゴリズムを提案する (図 1). なお, この変換アルゴリズムがβ–節と等価な節集合を生成することは次の定理による.

[定理 7] (等価変換に関する定理)

β–節 $l_1 \vee \cdots \vee l_n(\beta)$ が充足可能なとき, またそのときに限り変換アルゴリズムによって生成される${}_n\mathrm{C}_{\beta-1}$個の節はすべて充足可能である.

したがって, βSAT のすべてのβ–節 をそれと等価な節集合に変換することでβSAT を SAT へ変換することができる. ただし, 変換した結果節の数が極端に多くなることが予想される.

5. おわりに

本稿では, βSAT とその 0–1 整数計画問題としての定式化, ならびに陰的列挙法に基づくβSAT アルゴリズムで用いる諸定理を示した. また, βSAT をそれと等価な SAT へ変換するアルゴリズムを示した.

参考文献

1) J. N. Hooker: Generalized Resolution and Cutting Planes, *Ann. of Oper. Res.*, Vol. 12, pp.217-239(1988).

2) 大柳, 山本, 大内 : 陰的列挙法に基づく SAT アルゴリズム, 情報処理学会論文誌, Vol.34, No.12, pp.2464-2473(1993).