

## 代用電荷法によるポアソン方程式の数値計算法の改良

森下 博<sup>†</sup> 天野 要<sup>††</sup> 四ツ谷 晶二<sup>†††</sup>

代用電荷法はラプラス方程式の高速で高精度な近似解法として知られている。しかし、調和関数を基本解の1次結合で近似するという方法の原理から、ポアソン方程式には適していないと考えられてきた。最近、この代用電荷法の利点を生かしたポアソン方程式の数値計算法が提案された。その方法は、ポアソン方程式の解を特解と調和関数の和に分解し、前者を基本解で表現して数値積分し、後者を代用電荷法で近似する、というものである。その有効性は数値実験的にも検証されている。しかし、同時に、この方法には特解の数値積分に要する計算量が少なくないという大きな問題が指摘されていた。特解の数値積分はポアソン方程式の解の精度を決める鍵ともなっている。本稿では、この特解の数値積分の問題に注目して、改良されたポアソン方程式の数値計算法を提案し、その有効性を数値実験的に検証する。具体的には、特解の数値積分法として、(1)極座標を導入して対数ポテンシャルから生じる特異性を取り除き、(2)積分領域を境界値がなめらかな範囲で問題の領域を含む円領域に拡張し、さらに、(3)数値積分公式として、偏角方向には台形公式を、絶対値方向には二重指数関数型数値積分公式(DE公式)を採用する。数値実験の結果、実際に非常に精度の高い特解を得ることができる。最終的なポアソン方程式の数値解の精度も大幅に向上し、計算時間も短縮される。ここで注意すべきは、積分領域の拡張によって台形公式・DE公式という積分公式の優れた特徴が十分に発揮されるということである。この方法の基本的な考え方は3次元問題にも適用可能である。

## An Improved Numerical Method for Poisson's Equation by the Charge Simulation Method

HIROSHI MORISHITA,<sup>†</sup> KANAME AMANO<sup>††</sup> and SHOJI YOTSUTANI<sup>†††</sup>

The charge simulation method is known as a rapid and accurate solver for Laplace's equation, in which the solution is approximated by a linear combination of logarithmic potentials. It has been regarded as being unsuitable for Poisson's equation. However, a feasible method was recently presented for Poisson's equation making the best use of the charge simulation method. A particular solution is first obtained by numerical integration of the logarithmic formula. The problem is now reduced to Laplace's equation, which is approximated by the conventional charge simulation method. But, the method requires too much computation in the numerical integration of the particular solution, which is also a key to the accuracy of final results. In this paper, we propose an improved numerical method for solving the Dirichlet problem of Poisson's equation paying special attention to the numerical integration of the particular solution. We (1) remove the singularity caused by logarithmic potential by using the polar coordinate system, (2) extend the integral domain to a disk including the original problem domain, and (3) apply Trapezoidal formula and Double Exponential formula to the numerical integration. The combination of (1) ~ (3) results in high accuracy of the particular solution and the final results, and also in a reduction of the computational cost. The basic idea of the method is applicable also to three dimensional problems.

### 1. はじめに

代用電荷法<sup>1),2)</sup>はラプラス方程式の高精度の近似解を得る方法として知られている。具体的には、解である調和関数を基本解の1次結合で近似し、電荷と呼ばれる未定係数を境界上の拘束点で境界条件を満たすように定める。差分法や有限要素法が領域を分割するのに対し、代用電荷法は境界を分割するので未知数の数が少なくすむ。さらに、原理とプログラミングが簡

<sup>†</sup> 兵庫大学経済情報学部経済情報学科

Department of Economics and Information Science,  
Faculty of Economics and Information Science, Hyogo  
University

<sup>††</sup> 愛媛大学工学部情報工学科

Department of Computer Science, Faculty of Engineering,  
Ehime University

<sup>†††</sup> 龍谷大学理工学部数理情報学科

Department of Applied Mathematics and Informatics,  
Faculty of Science and Technology, Ryukoku University

単であり、計算量が少ないという特徴を持っている。また、領域の変形に対して融通性があることも注目すべき特徴の1つである。

代用電荷法は電気工学におけるポテンシャル解析<sup>3)</sup>や、数値等角写像<sup>4),5)</sup>のような問題に適用されて、大きな成功を収めている。また、そのスキーム<sup>6),7)</sup>や、電荷点と拘束点の選び方<sup>8),9)</sup>などの数学的な研究も進んでいる。しかし、基本解の重ね合わせという方法の原理から、一般的にはポアソン方程式には適していないと考えられてきた。

最近、森下<sup>10)</sup>は代用電荷法を適用したポアソン方程式の数値計算法を提案した。この方法はポアソン方程式の解の調和関数の部分を代用電荷法で近似するという村島の方法<sup>11)</sup>を特解が未知の場合に一般化したものである。具体的には、ポアソン方程式の解を特解と調和関数の和に分解し、まず前者を基本解の積分形で表現し、次に後者を代用電荷法で近似する。この方法で最大の問題となる特解の数値積分法については、特異点を中心とする極座標を導入して対数ポテンシャルから生じる特異性を取り除き、さらに積分領域を問題の領域を含む円領域に拡張して計算精度を上げている。積分公式としてはシンプソン則を採用している。その結果、全体として差分法や有限要素法などに比べて大幅に精度の高いポアソン方程式の数値計算法を構成することに成功し、数値実験的にもその有効性を検証した。また、同時に、特解の数値積分の精度を十分に上げておけば通常の代用電荷法と同程度の精度が期待できるという意味で、特解の精度がポアソン方程式の解の精度を決める鍵となることをも示している。一方、この方法は特解の数値積分に要する計算量が少なくないという問題を抱えていた。したがって、その数値積分の高速化といっそうの高精度化がポアソン方程式の数値解法としての重要な研究課題となる。

本稿では、ポアソン方程式の特解の数値積分法として、次のような方法を提案し、その有効性を数値実験的に検証する。

- (1) 極座標を導入して、対数ポテンシャルから生じる特異性を取り除く。
- (2) 積分領域を境界値がなめらかな範囲で問題の領域を含む円領域に拡張する。
- (3) 数値積分公式として、偏角方向には周期関数に強い台形公式を、絶対値方向には精度が高く効率の良い二重指数関数型数値積分公式 (DE 公式) を採用する。

数値実験の結果、実際に非常に精度の高い特解の近似解が得られた。また、このことによって、最終的な

ポアソン方程式の数値解の精度も大幅に向上する。計算時間も短縮される。ここで注意すべきは、積分領域の拡張と台形公式・DE 公式の採用という2つの手法の組合せによってはじめてこのような結果が得られることである。すなわち、積分領域の拡張によって台形公式・DE 公式という積分公式の優れた特徴が十分に発揮される。

なお、本稿では2次元問題を扱うが、提案する方法は3次元のポアソン方程式にも自然に拡張できる。

## 2. ポアソン方程式の数値計算法

### 2次元ポアソン方程式のディリクレ問題

$$\Delta u = f(x, y) \quad ((x, y) \in \Omega), \quad (1)$$

$$u = g(x, y) \quad ((x, y) \in \Gamma) \quad (2)$$

を扱う。Ω は (x, y) 平面上の有界領域で、Γ はその境界である。

#### 2.1 計算法の原理

まず、上記のポアソン方程式の特解として対数ポテンシャル

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi}$$

$$\int \int_{\Omega_1} f(\xi, \eta) \log \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} d\xi d\eta \quad (3)$$

を採用する。ここで、Ω<sub>1</sub> は Ω を含む円領域であり、f(x, y) は Ω<sub>1</sub> ∪ Γ<sub>1</sub> 上にもなめらかに拡張できるものとする。ただし、Γ<sub>1</sub> は領域 Ω<sub>1</sub> の境界である。次に、式 (3) で求めた v(x, y) を用いて、ラプラス方程式

$$\Delta w = 0 \quad ((x, y) \in \Omega), \quad (4)$$

$$w = g(x, y) - v(x, y) \quad ((x, y) \in \Gamma) \quad (5)$$

を解く。問題 (1), (2) の解は

$$u(x, y) = v(x, y) + w(x, y) \quad (6)$$

で得られる。

上記の特解 v(x, y) の近似解を数値積分で求め、ラプラス方程式 (4), (5) の近似解を代用電荷法で求める。以上が計算法の原理である。

#### 2.2 特解の数値計算法

特解の対数ポテンシャル (3) の被積分関数は対数型の特異点を含むので、特異点 (x, y) を中心とする極座標

$$\xi = r \cos \theta + x,$$

$$\eta = r \sin \theta + y$$

を導入し、式 (3) を

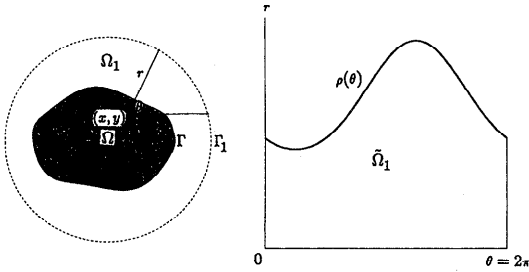


図1 円領域の極座標変換

Fig. 1 Change of a disk into the polar coordinate system with the origin at the singular point  $(x, y)$ .

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int \int_{\tilde{\Omega}_1} f(r \cos \theta + x, r \sin \theta + y) r \log r dr d\theta \tag{7}$$

と変数変換する。ただし、

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_1 &= \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq \rho(\theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi\}, \\ \rho(\theta) &= -(x \cos \theta + y \sin \theta) \\ &\quad + \sqrt{(x \cos \theta + y \sin \theta)^2 + R^2 - (x^2 + y^2)} \end{aligned}$$

である。  $\rho(\theta)$  は点  $(x, y)$  を始点とする偏角  $\theta$  の半直線が原点を中心とする半径  $R$  の円領域  $\Omega_1$  の境界に達するまでの距離を表している。変換された領域  $\tilde{\Omega}_1$  は点  $(x, y)$  ごとに形を変える。これを図1に示す。そこで、さらに変数変換

$$r = \rho(\theta)t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

を行って、式(7)を

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(\rho(\theta)t \cos \theta + x, \rho(\theta)t \sin \theta + y) t \log(\rho(\theta)t) \rho(\theta)^2 d\theta dt \tag{8}$$

と変形し、計算領域を矩形領域  $[0, 1]_t \times [0, 2\pi]_\theta$  に帰着する。ただし、  $\rho(\theta) = 0$  となる  $\theta$  に対しては、被積分関数の値は0と解釈するものとする。  $\Omega_1 = \Omega$  かつ、点  $(x, y)$  が境界  $\Gamma$  上にあるときには、このような状況に注意しなければならない。しかし、  $\Omega_1 \supset (\Omega \cup \Gamma)$  のときは、つねに  $\rho(\theta) > 0$  が保証されるので上の注意は不要である。

以上の変数変換の結果、対数ポテンシャル(3)の特異点  $(x, y)$  は矩形領域の  $t = 0$  の辺上に写像される。  $\rho(\theta) > 0$  のとき、

$$\lim_{t \rightarrow 0} t \log(\rho(\theta)t) = 0$$

であるから、この辺上で被積分関数の値は0と解釈することができる。式(7)に含まれる  $r \log r$  に起因する  $t = 0$  での特異性が消えるわけではないが、式(8)の被積分関数は  $\theta, t$  について連続であると考えてよい。

この式(8)の数値積分には、これまでいずれの方向にもシンプソン則が使用されていた<sup>10)</sup>。ここでは、台形公式とDE公式を組み合わせるという方法を提案し、具体的に次節で両者の比較検討を行う。まず、台形公式は解析的周期関数の1周期にわたる積分にきわめて高精度の結果を与えることが分かっている<sup>12)</sup>。そこで、式(8)の偏角  $\theta$  方向の積分

$$q(t) = \int_0^{2\pi} f(\rho(\theta)t \cos \theta + x, \rho(\theta)t \sin \theta + y) t \log(\rho(\theta)t) \rho(\theta)^2 d\theta$$

には台形公式を適用する。次に、  $t$  方向の積分

$$v = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 q(t) dt$$

にはシンプソン則よりも少ない計算量で高精度が期待されるDE公式<sup>13),14)</sup>を適用する。なぜならば、DE公式を用いることによって、  $t = 0$  での特異性を除去して(厳密には、  $-\infty$  に写してしまうことで)数値積分を精度良く計算できることが期待されるからである。具体的には、積分

$$\int_0^1 q(t) dt$$

の変数  $t$  を

$$t = \frac{1}{2} \varphi(s) + \frac{1}{2}, \quad \varphi(s) = \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh s\right)$$

で変数  $s$  に変換して、

$$\int_{-\infty}^{\infty} q\left(\frac{1}{2} \varphi(s) + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2} \varphi'(s) ds$$

を得る。台形公式は、周期関数の積分だけでなく、無限積分にも最適であることが知られている。そこで、きざみ幅  $h$  の台形公式を適用して、この積分を

$$h \sum_{i=-\infty}^{\infty} q\left(\frac{1}{2} \varphi(ih) + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2} \varphi'(ih)$$

で近似する。被積分関数は  $i$  が大きくなると二重指数関数的に減衰し、この無限和は有限項で打ち切ることができる。

以上をまとめて、問題の特解の数値解が

表1 円領域に対する特解の数値解の誤差比較  
 Table 1 Comparison of the numerical errors of the particular solution  $E_S^v$  and  $E_{DE}^v$  for a disk ( $m = 100$ ), where  $M_+ = M_t/2, M_- = -M_t/2$  and  $h = 20/M_t$  in Double Exponential formula.

$M_\theta \times M_t$	$\Omega_1 = \Omega (R = 1)$		$\Omega_1 \supset \Omega (R = 2)$	
	$E_S^v$	$E_{DE}^v$	$E_S^v$	$E_{DE}^v$
100 × 50	$9.4 \times 10^{-5}$	$8.2 \times 10^{-6}$	$2.5 \times 10^{-4}$	$5.5 \times 10^{-6}$
100 × 80	$5.6 \times 10^{-5}$	$9.6 \times 10^{-6}$	$9.6 \times 10^{-5}$	$1.4 \times 10^{-11}$
100 × 100	$4.7 \times 10^{-5}$	$9.6 \times 10^{-6}$	$6.2 \times 10^{-5}$	$2.9 \times 10^{-15}$
100 × 200	$3.6 \times 10^{-5}$	$9.6 \times 10^{-6}$	$1.5 \times 10^{-5}$	$1.6 \times 10^{-15}$
200 × 200	$3.9 \times 10^{-6}$	$1.2 \times 10^{-6}$	$1.5 \times 10^{-5}$	$2.7 \times 10^{-15}$
400 × 400	$9.6 \times 10^{-7}$	$1.5 \times 10^{-7}$	$3.9 \times 10^{-6}$	$1.8 \times 10^{-15}$
800 × 800	$2.4 \times 10^{-7}$	$1.9 \times 10^{-8}$	$9.6 \times 10^{-7}$	$2.0 \times 10^{-15}$

$$V = \frac{1}{2\pi} h \sum_{i=M_-}^{M_+} q(a_i) b_i,$$

$$a_i = \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh(ih)\right) + \frac{1}{2},$$

$$b_i = \frac{1}{2} \frac{\frac{\pi}{2} \cosh(ih)}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{2} \sinh(ih)\right)}$$

で得られる。

2.3 調和関数の数値計算法

特解  $v(x, y)$  の数値解  $V(x, y)$  が求まったので、ラプラス方程式のディリクレ問題 (4), (5) に代用電荷法<sup>1)</sup>を適用する。すなわち、ラプラス方程式 (4) の解を問題の領域  $\Omega$  の外部に配置された  $N$  個の電荷点  $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \dots, (\xi_N, \eta_N)$  を極とする対数ポテンシャルの 1 次結合

$$W(x, y) = \sum_{i=1}^N Q_i \log\{(x - \xi_i)^2 + (y - \eta_i)^2\}$$

で近似する。未定係数である電荷  $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$  は境界上に配置された  $N$  個の拘束点  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)$  上で境界条件 (5) を満たすように定める。すなわち、 $Q_i$  は拘束条件と呼ばれる連立 1 次方程式

$$\sum_{i=1}^N Q_i \log\{(x_j - \xi_i)^2 + (y_j - \eta_i)^2\} = g(x_j, y_j) - V(x_j, y_j) \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

の解である。結局、問題のポアソン方程式の近似解が

$$U(x, y) = V(x, y) + W(x, y)$$

で得られる。

3. 数値実験と考察

3.1 円領域の場合

典型的な計算例を示す。領域  $\Omega$  は原点を中心とする半径 1 の単位円

$$\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$$

とする。まず、

$$\Delta u = 2 \quad ((x, y) \in \Omega),$$

$$u = 2x^2 - y^2 \quad ((x, y) \in \Gamma),$$

すなわち  $f(x, y) = 2, g(x, y) = 2x^2 - y^2$  の場合を考える。真の解は  $u = 2x^2 - y^2$  である。

特解を求める際の積分領域を拡張しない場合 ( $\Omega_1 = \Omega$ ) と拡張する場合 ( $\Omega_1 \supset \Omega$ ) とで、数値積分の精度を比較検討する。

3.1.1  $\Omega_1 = \Omega$  の場合の特解

積分領域を  $\Omega_1 = \Omega$  とする。このとき、式 (3) で定義される特解は

$$v(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}$$

である。 $\theta$  方向の分割数を  $M_\theta, t$  方向の分割数を  $M_t$  として式 (8) の数値解  $V(x, y)$  を求める。点  $(x, y)$  が領域  $\Omega$  の内部にある場合には、 $\theta$  は区間  $[0, 2\pi]$  を動く。しかし、点  $(x, y)$  が境界  $\Gamma$  上にある場合には、実質的に積分領域が点  $(x, y)$  における接線の片側に制限されるため、 $\theta$  の積分区間の幅は  $\pi$  となる。特に、 $\log(\rho(\theta))$  はこの区間の両端で発散することに注意する。

原点を中心とした同心円上に評価点  $(x_{ij}, y_{ij})$  を

$$x_{ij} = (i/m) \cos(2\pi j/m),$$

$$y_{ij} = (i/m) \sin(2\pi j/m) \quad (i, j = 0, 1, 2, \dots, m)$$

ととり、特解の誤差を

$$e_{ij}^v = |V(x_{ij}, y_{ij}) - v(x_{ij}, y_{ij})|,$$

最大誤差を

$$E^v = \max_{0 \leq i, j \leq m} e_{ij}^v$$

で定義し、両方向にシンプソン則を採用した場合を  $E_S^v$ 、台形公式・DE 公式を採用した場合を  $E_{DE}^v$  と記して区別する。

$\Omega_1 = \Omega$  のまま、 $m = 100$  として最大誤差を調べたものが表 1 の第 2, 3 列である。これから分かるように、シンプソン則の場合に比べて、台形公式・DE

公式を採用すれば精度は向上するが、その違いはわずかである。いずれの場合も誤差は  $\Omega$  の境界  $\Gamma$  上で最大値をとる。

なお、数値例における DE 公式の標本点数と刻み幅は次のように決定した。まず、変数  $t$  を 2.2 節のように DE 変換した変数  $s$  上の積分区間を  $[M_-h, M_+h] = [-M_t h/2, M_t h/2] = [-10, 10]$  とする。ここに、 $M_t$  は区間全体の分割数（すなわち、標本点数は  $M_t + 1$ ）、 $h$  は DE 公式で適用される台形則のきざみ幅である。したがって、両者の間にはつねに  $M_t h = 20$  という関係がある。このとき、両端点  $s = \pm 10$  における重み関数は  $b_{\pm M_t/2} \simeq 10^{-15.022}$  であり、被積分関数は十分に減衰している。

さらに、 $\theta$  方向、 $t$  方向とも DE 公式を用いたもの（DE 公式・DE 公式と書く）との誤差の比較検討を行った。 $M_\theta \times M_t = 800 \times 800$  のとき、台形公式・DE 公式の場合の誤差の状況は、内点では境界への近さによらず一様に  $10^{-16}$  程度であり、境界点でのみ  $10^{-8}$  程度である。DE 公式・DE 公式の場合の誤差の状況はこれと異なる。原点付近では  $10^{-16}$  程度であるが、境界に近い内点では  $10^{-7}$  程度まで大きくなり、境界点では再び  $10^{-16}$  程度になる。これらの結果は、なめらかな周期関数には台形公式が高精度を与え<sup>12)</sup>、端点の特異性には DE 公式が高精度を与える<sup>13), 14)</sup>、という理論に一致する。境界点では被積分関数の値は積分区間の両端点で 0 となるが、なめらかな周期関数とはいえない。そのために、台形公式の精度は低く、DE 公式の精度が高くなっている。このような理由により、積分領域を拡張して境界点をあたかも内点のように取り扱い、そのうえで内点に対して精度の良い台形公式・DE 公式を採用して、全体としての計算精度の向上を図ることにする。

### 3.1.2 $\Omega_1 \supset \Omega$ の場合の特解

積分領域を原点を中心とする半径  $R (> 1)$  の円

$$\Omega_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

に拡張して数値積分を行う。このとき、式 (3) で定義される特解は

$$v(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + R^2 \left( \log R - \frac{1}{2} \right)$$

となる。 $R = 2$  とし、最大誤差を調べたものが表 1 の第 4, 5 列である。これから分かるように、シンプソン則に比べ台形公式・DE 公式を採用した方が少ない分割数ではるかに高い精度が得られている。これには次のような理由が考えられる。 $\Omega_1 = \Omega$  の場合には、境界  $\Gamma$  上の点  $(x, y)$  に対して、実質的な  $\theta$  の積分区間の幅は  $\pi$  となり、特に  $\log \rho(\theta)$  がこの区間の両端

で発散する。しかし、積分領域を拡張すると、境界  $\Gamma$  上の点の場合でも、 $\rho(\theta)$  は  $\theta$  について周期  $2\pi$  のなめらかな関数となり、それが解析的な関数に強い（周期関数に対する）台形公式に有利に働く。また  $t$  方向の積分でも、DE 公式によって  $t = 0$  での特異性を除去して精度良く計算できる。このように、積分領域の拡張と台形公式・DE 公式の採用によりはじめて高精度化と計算時間の短縮を実現することが可能である。

なお、シンプソン則の場合に、積分領域を拡張した方が最大誤差が大きくなっているのは  $M_\theta$  と  $M_t$  を固定したままで領域を拡張したためと考えられる。台形公式・DE 公式の場合には、メッシュ間隔の増大にもかかわらず、このような高精度な結果が得られていることに注目すべきである。このことは積分領域の拡張によって、それぞれの公式の優れた特徴が発揮された結果といえる。また、積分領域を拡張した場合には、誤差が問題の領域  $\Omega$  全体で平均化され、最大誤差は境界  $\Gamma$  上ではなく内部に現れていた。

### 3.1.3 ポアソン方程式の数値解

数値的に求めた特解  $V(x, y)$  を利用して、2.3 節の方法でポアソン方程式の数値解を求め、精度を比較検討する。

代用電荷法の拘束点を単位円上に

$$\begin{aligned} x_j &= \cos(2\pi j/N), \\ y_j &= \sin(2\pi j/N) \quad (j = 1, 2, \dots, N) \end{aligned}$$

とおき、電荷点を半径  $R_\alpha (> 1)$  の円上に

$$\begin{aligned} \xi_i &= R_\alpha \cos(2\pi i/N), \\ \eta_i &= R_\alpha \sin(2\pi i/N) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \end{aligned}$$

とおいて、ラプラス方程式の数値解  $W(x, y)$  を求める。ポアソン方程式の近似解は

$$U(x, y) = V(x, y) + W(x, y)$$

で得られる。

前述の評価点  $(x_{ij}, y_{ij})$  における誤差を

$$e_{ij}^u = |U(x_{ij}, y_{ij}) - u(x_{ij}, y_{ij})|,$$

最大誤差を

$$E^u = \max_{0 \leq i, j \leq m} e_{ij}^u,$$

で定義し、両方向にシンプソン則を採用した場合を  $E_S^u$ 、台形公式・DE 公式を採用した場合を  $E_{DE}^u$  と記して区別する。

$M_\theta \times M_t = 100 \times 200$  として特解を求め、 $R_\alpha = 4$ 、 $N = 32$  としてラプラス方程式の近似解を求めた。その結果、 $m = 100$  として、

$$\Omega_1 = \Omega \text{ のとき, } E_{DE}^u = 1.7 \times 10^{-5},$$

$$\Omega_1 \supset \Omega \text{ のとき, } E_{DE}^u = 9.4 \times 10^{-15}$$

となった。表 1 における同じ  $M_\theta \times M_t = 100 \times 200$

表2 円領域に対するポアソン方程式の数値解の誤差比較  
 Table 2 Comparison of the numerical errors of Poisson's equation  $E_S^u$  and  $E_{DE}^u$  for a disk ( $M_\theta = 100$ ,  $M_t = 200$ ,  $N = 32$ ,  $R_\alpha = 4$ ,  $m = 100$ ).

$u(x, y)$	$f(x, y)$	$\Omega_1 = \Omega (R = 1)$		$\Omega_1 \supset \Omega (R = 2)$	
		$E_S^u$	$E_{DE}^u$	$E_S^u$	$E_{DE}^u$
$x^2 + y^2$	4	$1.1 \times 10^{-4}$	$3.4 \times 10^{-5}$	$2.5 \times 10^{-15}$	$3.9 \times 10^{-15}$
$x^3 + y^3$	$6(x + y)$	$2.3 \times 10^{-4}$	$7.1 \times 10^{-5}$	$2.1 \times 10^{-14}$	$2.2 \times 10^{-14}$
$x^4 + y^4$	$12(x^2 + y^2)$	$3.3 \times 10^{-4}$	$1.0 \times 10^{-4}$	$9.3 \times 10^{-5}$	$5.9 \times 10^{-14}$
$x^5 + y^5$	$20(x^3 + y^3)$	$5.1 \times 10^{-4}$	$1.2 \times 10^{-4}$	$6.4 \times 10^{-5}$	$1.6 \times 10^{-13}$
$x^6 + y^6$	$30(x^4 + y^4)$	$6.9 \times 10^{-4}$	$1.4 \times 10^{-4}$	$1.8 \times 10^{-4}$	$4.2 \times 10^{-13}$
$x^7 + y^7$	$42(x^5 + y^5)$	$1.0 \times 10^{-3}$	$1.9 \times 10^{-4}$	$1.4 \times 10^{-4}$	$1.1 \times 10^{-12}$
$x^8 + y^8$	$56(x^6 + y^6)$	$1.3 \times 10^{-3}$	$2.6 \times 10^{-4}$	$2.9 \times 10^{-4}$	$3.3 \times 10^{-12}$
$x^9 + y^9$	$72(x^7 + y^7)$	$1.7 \times 10^{-3}$	$3.3 \times 10^{-4}$	$2.5 \times 10^{-4}$	$2.0 \times 10^{-11}$
$x^{10} + y^{10}$	$90(x^8 + y^8)$	$1.9 \times 10^{-3}$	$4.2 \times 10^{-4}$	$4.9 \times 10^{-4}$	$3.1 \times 10^{-11}$
$\sin x \cos y$	$-2 \sin x \cos y$	$3.9 \times 10^{-5}$	$9.4 \times 10^{-6}$	$1.4 \times 10^{-6}$	$2.7 \times 10^{-15}$

での  $E_{DE}^u$  の2つの値

$$\Omega_1 = \Omega \text{ のとき, } E_{DE}^u = 9.6 \times 10^{-6},$$

$$\Omega_1 \supset \Omega \text{ のとき, } E_{DE}^u = 1.6 \times 10^{-15}$$

と比較すると、特解の精度がポアソン方程式の解の精度を決定していることが確かめられる。他の  $M_\theta$ ,  $M_t$  でも同様の結果が得られる。

### 3.1.4 次数に対する安定性

解が多項式で与えられる場合の次数を2次から10次まで変えて、 $\Omega_1 = \Omega (R = 1)$  と  $\Omega_1 \supset \Omega (R = 2)$  の場合にそれぞれシンプソン則または台形公式・DE公式を採用して、ポアソン方程式の計算精度を比較したものが表2である。ここには解が三角関数で与えられる場合も含まれている。積分領域を拡張して台形公式・DE公式を採用することによって、全体的に非常に高精度の結果を得ることができる。

なお、積分領域を拡張したシンプソン則の2次と3次の例で非常に高い精度が得られているが、これは例外的なものである。実際、2次の問題で特解の精度を調べたところ  $10^{-5}$  のオーダーであった。ポアソン方程式の誤差は  $10^{-15}$  のオーダーであるから、この場合には、特解と調和関数の誤差がたまたま打ち消し合っていると考えられる。同じ問題で台形公式・DE公式を採用した場合の特解の誤差は  $10^{-15}$  のオーダーであった。

## 3.2 正方形領域の場合

論文10)の結果と比較するために、正方形領域

$$\Omega = \{(x, y) : |x| < 1, |y| < 1\}$$

の場合を検討する。

### 3.2.1 特解の精度

領域を半径2の円

$$\Omega_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$$

に拡張して数値積分を行った。積分領域を拡張すると、原理的に、境界上の計算精度は領域内の点と同等まで

向上する。さらに、この精度は領域  $\Omega$  の形状にかかわらず、円領域の場合と同等であると考えられる。実際、 $u(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $f(x, y) = 4$  の場合に、台形公式・DE公式を採用した特解の誤差は円領域、正方形領域ともに  $10^{-15}$  のオーダーで、シンプソン則を採用した場合は円領域、正方形領域ともに  $10^{-5}$  のオーダーであった。

ポアソン方程式の数値解の誤差は特解の誤差とラプラス方程式を解く際に生じる誤差の和である。一般的には、これらの誤差は独立であり、特解の誤差はポアソン方程式の誤差と同程度以下であると考えられる。したがって、円領域の特解の誤差と同様に、正方形領域の特解の誤差も、表2の第5, 6列 ( $\Omega_1 \supset \Omega$ ) の値と同程度以下であると考えられる。

### 3.2.2 電荷配置について

正方形領域の場合には角点付近の電荷配置に工夫を要する。ここでは天野<sup>15)</sup>の方法を採用する。すなわち、拘束点  $z_j = x_j + iy_j$  を境界上に配置し、電荷点を

$$\zeta_j = z_j + \frac{1}{2} r_\alpha |z_{j+1} - z_{j-1}| e^{i \{\arg(z_{j+1} - z_{j-1}) - \pi/2\}}$$

で配置する。つまり、拘束点  $z_j$  の前後の拘束点  $z_{j-1}$ ,  $z_{j+1}$  の距離と角度から  $j$  番目の電荷点  $\zeta_j$  を求める。 $r_\alpha$  は電荷配置のパラメータである。この方法を採用すると、領域がなめらかでない場合でも比較的簡単に高精度の解を得ることができる。

### 3.2.3 次数に対する安定性

表2の円領域と同じ問題で、正方形領域の場合の計算精度を比較したものが表3である。 $E_{FDM}^u$ ,  $E_S^u$ ,  $E_{DE}^u$  は、差分法を用いた場合の最大誤差、シンプソン則を用いた場合の最大誤差、台形公式・DE公式を用いた場合の最大誤差で、正方形領域  $\Omega$  を  $m \times m = 100 \times 100$  分割した格子点上でこれまでと同様に定義される。この表の第3, 4列は論文10)の差分法 ( $h = 2/m$ ,  $m = 100$ )

表3 正方形領域に対するポアソン方程式の数値解の誤差比較  
 Table 3 Comparison of the numerical errors of Poisson's equation  $E_{FDM}^u$  (with  $100 \times 100$  meshes),  $E_S^u$  and  $E_{DE}^u$  ( $N = 80, r_a = 40, m = 100$ ) for a square domain.

$u(x, y)$	$M_\theta \times M_t$		800 × 800	100 × 200	100 × 200
	$f(x, y)$	$E_{FDM}^u$	$E_S^u$	$E_S^u$	$E_{DE}^u$
$x^2 + y^2$	4	$3.7 \times 10^{-10}$	$1.3 \times 10^{-11}$	$5.6 \times 10^{-12}$	$9.2 \times 10^{-12}$
$x^3 + y^3$	$6(x + y)$	$1.7 \times 10^{-10}$	$3.7 \times 10^{-10}$	$3.6 \times 10^{-10}$	$1.4 \times 10^{-10}$
$x^4 + y^4$	$12(x^2 + y^2)$	$4.7 \times 10^{-4}$	$7.0 \times 10^{-6}$	$1.1 \times 10^{-4}$	$7.8 \times 10^{-9}$
$x^5 + y^5$	$20(x^3 + y^3)$	$3.9 \times 10^{-4}$	$5.7 \times 10^{-6}$	$9.4 \times 10^{-5}$	$6.7 \times 10^{-9}$
$x^6 + y^6$	$30(x^4 + y^4)$	$1.1 \times 10^{-3}$	$1.8 \times 10^{-5}$	$2.7 \times 10^{-4}$	$4.8 \times 10^{-8}$
$x^7 + y^7$	$42(x^5 + y^5)$	$1.1 \times 10^{-3}$	$1.7 \times 10^{-5}$	$2.7 \times 10^{-4}$	$4.8 \times 10^{-8}$
$x^8 + y^8$	$56(x^6 + y^6)$	$1.9 \times 10^{-3}$	$4.2 \times 10^{-5}$	$5.3 \times 10^{-4}$	$8.1 \times 10^{-8}$
$x^9 + y^9$	$72(x^7 + y^7)$	$2.0 \times 10^{-3}$	$3.2 \times 10^{-5}$	$6.1 \times 10^{-4}$	$1.6 \times 10^{-7}$
$x^{10} + y^{10}$	$90(x^8 + y^8)$	$3.1 \times 10^{-3}$	$9.6 \times 10^{-5}$	$1.0 \times 10^{-3}$	$1.2 \times 10^{-6}$
$\sin x \cos y$	$-2 \sin x \cos y$	$3.5 \times 10^{-6}$	$1.0 \times 10^{-7}$	$1.7 \times 10^{-6}$	$1.4 \times 10^{-10}$

とシンプソン則 ( $M_\theta \times M_t = 800 \times 800$ ) の結果であり, 第5, 6列は  $M_\theta \times M_t = 100 \times 200$  のシンプソン則と台形公式・DE公式の結果である. 台形公式・DE公式を採用した場合の精度は, 4次以上の場合, シンプソン則と比較して非常に高い. しかも多項式の次数を上げて誤差が急激に大きくなることはない.

表2の第5, 6列の円領域との比較では, シンプソン則の誤差はやや大きくなり, 台形公式・DE公式の誤差はかなり大きくなっている. このことについて考える. 正方形の特解の誤差が表2の第5, 6列の円領域のポアソン方程式の誤差と同程度以下と考えられることはすでに述べた(ただし, 2次の場合は  $10^{-5}$  のオーダーであり, 3次も  $10^{-5}$  のオーダー以下であると推測される). したがって, 台形公式・DE公式を採用した場合, ポアソン方程式の数値解の誤差はラプラス方程式を解く際の誤差によって特解の誤差より大きくなっていると解釈される. 逆にいうと, ラプラス方程式を解く際の誤差は表3の第6列に一致するものと解釈される. 一方, シンプソン則を採用した場合, 特解の誤差がすでに  $10^{-4}$  程度であるので, ラプラス方程式を解く際に生じる誤差は無視できることになる.

#### 4. おわりに

特解の数値積分の問題に注目して, 代用電荷法によるポアソン方程式の数値計算法<sup>10)</sup>を改良し, 数値実験的にその有効性を検証した.

この方法の原理は, ポアソン方程式の解を特解と調和関数の和に分解し, 前者を基本解で表現して数値積分し, 後者を代用電荷法で近似するというものである. 理論的には特解の数値積分の精度を十分に上げておけば, ポアソン方程式についてもラプラス方程式の解と同程度の精度を期待できることが分かっている. しか

し, これまで, この特解の数値積分が計算量と計算精度の両面からボトルネックになっていた.

本稿では, この特解の数値積分法として, (1) 極座標を導入して対数ポテンシャルから生じる特異性を取り除き, (2) 積分領域を問題領域を含む円領域に拡張して, (3) 台形公式・DE公式を適用するという方法を提案した. 数値実験の結果, 計算精度は大幅に向上し, 計算時間も短縮された. 特に台形公式・DE公式の採用によって, シンプソン則と同程度の誤差で特解を計算するにはるかに少ない格子点ですむことが可能となった. これは, 積分領域をなめらかに拡張することにより, 周期関数に強い台形公式, 分割数が少なく精度の高いDE公式の長所がうまく引き出された結果であるといえる. 実際に特解の数値積分に要した計算時間は, Sun Ultra 1 Model 170 (167MHz) で, 領域を  $M_\theta \times M_t = 100 \times 200$  分割して, 各点  $(x, y)$  あたり 0.27 秒から 0.36 秒程度であった.

なお, この方法は3次元問題にも自然に拡張, 適用することができる. また, 数値積分の部分は各点ごとの計算が独立なので, 並列計算との相性も良い.

このポアソン方程式の数値計算法の大きな特徴の1つは領域の変形に対する柔軟性である. 今後, この特徴を活かして, 非線形方程式の解の領域の形に対する依存性を解析することを研究課題としたい.

謝辞 数値積分法について有益なコメントをくださった京都大学数理解析研究所森正武教授, 名古屋大学杉原正顯教授に感謝します.

#### 参考文献

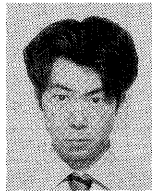
- 1) 村島定行: 代用電荷法とその応用, 森北出版, 東京 (1983).
- 2) 岡本 久, 桂田祐史: ポテンシャル問題の高速

- 解法, 応用数理, Vol.2, No.3, pp.2-20 (1992).
- 3) Singer, H., Steinbigler, H. and Weiss, P.: A Charge Simulation Method for the Calculation of High Voltage Fields, *IEEE Trans. Power Apparatus Systems*, Vol.PAS-93, No.5, pp.1660-1668 (1974).
  - 4) Amano, K.: A Charge Simulation Method for the Numerical Conformal Mapping of Interior, Exterior and Doubly-Connected Domains, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol.53, No.3, pp.353-370 (1994).
  - 5) Amano, K.: A Charge Simulation Method for Numerical Conformal Mapping onto Circular and Radial Slit Domains, *SIAM J. Sci. Comput.*, Vol.19, No.4, pp.1169-1187 (1998).
  - 6) 室田一雄: 代用電荷法におけるスキームの「不変性」について, 情報処理学会論文誌, Vol.34, No.3, pp.533-535 (1993).
  - 7) 天野 要, 井上哲男: 代用電荷法による数値等角写像のスケール変換不変性, 日本応用数理学会論文誌, Vol.8, No.1, pp.1-17 (1998).
  - 8) Katsurada, M. and Okamoto, K.: The Collocation Points of the Fundamental Solution Method for the Potential Problem, *Computers Math. Appl.*, Vol.31, No.1, pp.123-137 (1996).
  - 9) 井上哲男, 天野 要: 数値等角写像のための代用電荷法における理論的な電荷点配置に基づく数値実験的研究, 日本応用数理学会論文誌, Vol.7, No.4, pp.429-442 (1997).
  - 10) 森下 博, 小林尚弘, 高市英明, 天野 要, 四ツ谷晶二: 代用電荷法によるポアソン方程式の数値計算, 情報処理学会論文誌, Vol.38, No.8, pp.1483-1491 (1997).
  - 11) 村島定行: 代用電荷法のポアソン方程式への応用, 静電気学会誌, Vol.4, No.1, pp.38-43 (1980).
  - 12) Mori, M.: On the Superiority of the Trapezoidal Rule for the Integration of Periodic Analytic Functions, *Memoirs of Numerical Mathematics*, No.1, pp.11-19 (1974).
  - 13) Takahashi, H. and Mori, M.: Error Estimation in the Numerical Integration of Analytic Functions, *Report of the Computer Center*, 3, pp.41-108, Univ. of Tokyo (1970)

- 14) 森 正武: 数値計算プログラミング, 岩波書店 (1988).
- 15) 天野 要: 代用電荷法に基づく数値等角写像の誤差の性質, 情報処理学会論文誌, Vol.32, No.1, pp.1-10 (1991).

(平成 10 年 11 月 9 日受付)

(平成 11 年 7 月 1 日採録)



森下 博 (正会員)

1970 年生。1993 年龍谷大学理工学部数理情報学科卒業。1995 年龍谷大学大学院理工学研究科修士課程数理情報学専攻修了。現在、兵庫大学経済情報学部経済情報学科助手。研究分野は非線形偏微分方程式と数値解析。日本数学会、日本応用数理学会各会員。



天野 要 (正会員)

1948 年生。1971 年京都大学工学部電子工学科卒業。1978 年北海道大学大学院工学研究科博士課程電気工学専攻修了。工学博士。現在、愛媛大学工学部情報工学科教授、総合情報処理センター長。研究分野は計算科学と情報科学。情報処理学会創立 30 周年記念論文賞、日本応用数理学会 1996 年度論文賞受賞。日本応用数理学会、日本数学会、電子情報通信学会、日本心理学会、SIAM、ACM 各会員。



四ツ谷晶二

1950 年生。1974 年大阪大学理学部数学科卒業。1979 年大阪大学大学院理学研究科博士課程数学専攻単位取得退学。理学博士。現在、龍谷大学理工学部数理情報学科教授。研究分野は非線形偏微分方程式と数値解析。日本数学会、日本応用数理学会、日本混相流学会各会員。