空間くりこみを伴う一次元セルオートマトンの特性表現[注1]

6L－1

香山喜彦[1]，今村泰正[2]
[1]梅花女子大学，[2]神戸大学自然

1．はじめに

一次元セルオートマトンの時間発展に伴う振舞いは，Wolframにより，一様な状態に移行するクラスⅠから，カオス的であったり一定のパターンが続いたりといった複雑な振舞いをするクラスⅣまでの，4つのクラスに分類されている[1]．前回の情報処理学会での発表では，基本的な2状態3近傍ルールに対して「特性表現」を定義し，特に，カオス的なクラスⅢルールと，複雑な振舞いをするクラスⅣルールとの区別について，この表現が有効であることを示した[2]．続いて今回の発表では，この特性表現をより複雑な多近傍ルールで求められるように拡張する．その際，複数のセルを1つにくりこむことによって得られる実効的な3近傍ルール関数から特性表現を定義する．具体例としては，2状態5近傍ルールのうち，総和型と呼ばれるもの64個について，各クラスの特性を明らかにする．

2．多近傍ルールの特性表現

先ず，2状態 $2r+1$ 近傍セルオートマトンを以下のように表現する．状態値として0または1の値を取る i 番目のセルの状態変数を x_i とすると，1次元 rN セルの状態配位は $X=\{x_1,x_2,..,x_{rN}\}$ で与えられる．全ての状態配位の集合を配位空間と呼び，$\{X\}_{rN}$で表す．各セルの次の時間ステップの状態を決定するルール関数は $2r+1$ 近傍ルールの場合，次のように表現される：

$$x_i^{(t+1)}=F_r\left(x_i^{(t)}\right)=F\left(x_{i-r}^{(t)},\ldots,x_i^{(t)},\ldots,x_{i+r}^{(t)}\right)$$

この関数を用いて，配位空間 $\{X\}_{rN}$ からそれ自身への写象 $\boldsymbol{F}:\{X\}_{rN}\rightarrow\{X\}_{rN}$ を以下のように定義する：

$$\boldsymbol{F}(X)=\boldsymbol{F}\left((x_1,x_2,\ldots,x_{rN})\right)=\left(F_r(x_1),F_r(x_2),\ldots,F_r(x_{rN})\right)$$

但し，周期的境界条件を仮定する．時間発展は，写象 $\boldsymbol{F}$ の合成により与えられる．最初の $2r+1$ 近傍ルール関数を1次のルール関数と呼び，$F^{(1)}$ と書けば，t 次のルール関数は

$$F_r^{(t)}(x_i)=F_r^{(1)}\left(F_r^{(1)}\left(\ldots F_r^{(1)}(x_i)\ldots\right)\right)=F^{(t)}\left(x_{i-rt},\ldots,x_i,\ldots,x_{i+rt}\right)$$

で与えられる．これにより，配位空間上の t 次の写象 $\boldsymbol{F}^{(t)}:\{X\}_{rN}\rightarrow\{X\}_{rN}$ も同様に定義される．混乱を避けるため，3近傍(r=1)ルール関数は f と表記すると，前回の発表では3近傍ルールについて充分時間を経過した後の配位空間$\{X\}_N$の $f^{(t)}$ による像 $f^{(t)}(\{X\}_N)$ に作用するルール関数の実効的な表現を"特性表現"と呼び，それを各ルールに対して求めることによってクラス分類を試みた．その拡張として $2r+1$ 近傍ルールの特性表現を求めるには，$2r+1$ 近傍ルールを3近傍ルールに変換する必要がある．そのために r 個のセルを1つにくりこむ変換$\psi_r:\{X\}_{rN}\rightarrow\{X\}_N$を定義する．$\boldsymbol{F}^{(t)}(\{X\}_N)$と $\boldsymbol{F}^{(t+1)}(\{X\}_N)$を$\psi_r$でくりこんだ$\psi_r\circ\boldsymbol{F}^{(t)}(\{X\}_N)$と$\psi_r\circ\boldsymbol{F}^{(t+1)}(\{X\}_N)$をつなぐ写像を f_{eff} とすれば，これらの関係は

$$\begin{array}{ccccc}
\boldsymbol{F}^{(t)}(\{X\}_{rN}) & \xrightarrow{\psi_r} & \psi_r\circ\boldsymbol{F}^{(t)}(\{X\}_{rN}) & \subset\{X\}_N \\
\boldsymbol{F}\downarrow & & f_{eff}\downarrow & \\
\boldsymbol{F}^{(t+1)}(\{X\}_{rN}) & \xrightarrow{\psi_r} & \psi_r\circ\boldsymbol{F}^{(t+1)}(\{X\}_{rN}) &
\end{array}$$

となる．ψ_rは多対一写像であるから，$\psi_r\circ\boldsymbol{F}^{(t)}(\{X\}_N)$ に含まれる各状態配位 $X^{(t)}$に対し，それぞれの多重度 $m_\psi(X^{(t)})$ を定義する．また各 $X^{(t)}$内に3セル状態 (0,0,0)…(1,1,1) (i=0…7) が出現する数を $n(i,X^{(t)})$ とすれば，以下の等式は明らかである：

$$\sum_{X^{(t)}\in\psi_r\circ\boldsymbol{F}^{(t)}(\{X\}_{rN})}m_\psi\left(X^{(t)}\right)=2^{rN},\quad \sum_{i=0}^{7}n\left(i,X^{(t)}\right)=N$$

また，各3セル状態が出現する割合は，

[注1] Chracteristic Representation of One-dimensional Cellular Automata with Spacial Renormalization
Yoshihiko KAYAMA, Yasumasa IMAMURA[1]
BAIKA Women's College, [1]KOBE University

$$P_\psi^{(t)}(i)=\frac{1}{2^{rN}\cdot N}\sum_{X^{(t)}\in\psi,\ _{O}F^{(t)}(\{X\}_{rN})} m_\psi\left(X^{(t)}\right)n\left(i,X^{(t)}\right)$$

で与えられる．後のため t=0, N=3, すなわち，3r個のセルからなる全ての状態配位をψ_rでくりこんだ時の3セル状態 (i=0...7) が出現する割合を特別に $p_\psi(i)$と書き，$X^{(0)}=i$, $n(i,i)$=1を考慮すれば，

$$p_\psi(i)=\frac{1}{2^{3r}}\sum_{i=0}^{7}m_\psi(i)$$

となる．写像f_{eff}から3近傍ルール関数は一般に導けないが，$f_{eff}(0,0,0)\ldots f_{eff}(1,1,1)$ ($f_{eff}(i)$, i=0.. 7) の値で定義される実効的関数 f_{eff} は，写像 f_{eff}による配位の対応$X^{(t)}\to X^{(t+1)}$において，$X^{(t)}$に含まれる各3近傍状態(i=0...7)が1になる確率として求めることができる．この関数f_{eff}を用いると t+1 次でのくりこまれた後の状態配位$X^{(t+1)}$の重み(weight)の平均値は，以下のように表せる：

$$\left\langle w\left(X^{(t+1)}\right)\right\rangle_N=N\sum_{i=0}^{7}P_\psi^{(t)}(i)f_{eff}(i)$$

これによってルール関数 F に対する特性関数$f^{(t)}$の条件として

$$\left\langle w\left(X^{(t+1)}\right)\right\rangle_N=N\sum_{i=0}^{7}p_\psi(i)\tilde{f}^{(t)}(i)$$

を得る．この式だけでは一般に $f^{(t)}$ は定まらないが，いま3セル状態の出現確率 $P_\psi^{(t)}(i)$を$p_\psi(i)$に等しくなるようにf_{eff}を補正して $f^{(t)}$を定義する：

$$\tilde{f}^{(t)}(i)=\begin{cases} f_{eff}(i) & \text{for } P_\psi^{(t)}(i)\ge p_\psi(i)\\ \dfrac{P_\psi^{(t)}(i)}{p_\psi(i)}f_{eff}(i)+\dfrac{\sum_{j \text{ for } P_\psi^{(t)}(j)\ge p_\psi(j)}\left(P_\psi^{(t)}(j)-p_\psi(j)\right)f_{eff}(j)}{\sum_{j \text{ for } P_\psi^{(t)}(j)\ge p_\psi(j)}\left(P_\psi^{(t)}(j)-p_\psi(j)\right)}\left(1-\dfrac{P_\psi^{(t)}(i)}{p_\psi(i)}\right) & \text{for } P_\psi^{(t)}(i)< p_\psi(i)\end{cases}$$

5近傍ルール番号	クラス	3近傍クラスIの成分	3近傍クラスIIの成分	3近傍クラスIII, IVの成分
4	I	1.000	0.000	0.000
62	I	1.000	0.000	0.000
8	II	0.886	0.114	0.000
56	II	0.534	0.466	0.000
18	III	0.475	0.481	0.044
34	III	0.458	0.293	0.249
50	III	0.361	0.496	0.143
20	IV	0.989	0.011	0.000
52	IV	0.711	0.285	0.004

5近傍総和型ルール特性表現の3近傍ルールの各クラスに対する成分. (rN=1000, t=500, 初期配位500の計算)

これを3近傍ルール関数で展開した特性表現

$$\tilde{f}^{(t)}(i)=\sum_{R\ :\ \#\ \text{of 3-neighbor CA Rule}}\alpha^R(t)f_R(i)$$

の係数 $\alpha^R(t)$は，時間発展後の特性関数に含まれる3近傍オートマトンルール関数の割合を表わすもので，各ルールが時間発展によりどのようなルールの性質を顕在化させるかをみることができる．以上の拡張された特性表現を実際に5近傍総和型ルールに対して求めることができる．但し，安定状態を持たない奇数番号のルールは除く．r=2 すなわち2セルをくりこむ関数ψとしてここでは (1,1)→(1), その他→(0)を採用したシミュレーション結果を左の表に示す．これによれば，各クラスの性質が明確に表現されている．特にクラスⅣと言われている#20と#52の特徴として，他のクラスⅢルールに比べて，3近傍クラスⅢルールへの移行の割合が少ないことがわかる．

3．結論

以上のように多近傍ルールへの特性表現の拡張は，くりこみ処方によって可能である．5近傍総和型ルールの例のように，この表現は3近傍ルールを指標とした複雑系の考察に有効な手段の一つであることがわかる．

参考文献

[1]S. Wolfram, "Universarity and complexity in cellular automata", Physica, 10D (1984) 1.
[2]Y. Kayama, H. Anada, Y. Imamura, "Characteristic Representation of Elementary Cellular Automata", BAIKA Coll. preprint, (1993).