5L－3

ネットワークの再利用による最大流問題の解法

八百　義彦　　岩沢　京子　　中森　眞理雄
東京農工大学　工学部　電子情報工学科　情報工学大講座

1. はじめに

いくつもの似たような構造のネットワークについて，そのすべてについて最大流を求めることはネットワークの設計などでしばしば起こる．このとき，それぞれのネットワークについてはじめから最大流を求めるのは無駄が多い．本研究では，あるネットワークについて求めた最大流の情報を用い，その一部分を修正することによって，別のネットワークの最大流を求めることを目的としている．本論文では，似たような構造のネットワークとは，ある一つのネットワークの枝を１本除去したり，接続したりして得られるネットワークのこととする．

2. 諸定義

最大流を求める方法としてはラベリング法を用いる．ラベリング法とは，入口 s から出口 t まで流れを増やせる道を１本見つけその道に沿ってできる限り流れを増やし，改めて s から t まで流れを増やせる道を見つけその道に流れを増やすという操作を流れを増やせる道がなくなるまで繰り返すという方法である．流れを増やせる道を増加路とよぶ．また流れを流すことができる枝を有用な枝という．

3. ネットワーク分割法

最大流問題については次の定理が知られている．
（定理）最大流最小切断定理
入り口 s から出口 t への最大フローは，s から t を分ける切断の容量の最小値に等しい．
なお，最小カットは一意とは限らない．

ここでは，ネットワークを最大流最小切断定理によっていくつかのグループに分割する．この定理よりグループは２つとは限らない．分割する方法は，
① 始点 s を p とし，n=1 とする．
② p からフローを増やすことができる枝をたどっていき，そのとき通った点でまだグループに属していないものをグループ（n）とする．
③ 終点 t がいずれかのグループに属したら終了．
④ グループ（n）の点の終点のうちまだグループに属していない点の一つを p とし n=n+1 とし②へ．

4. 枝の変化

4.1 枝が切断された場合

枝（i, j）を切断した場合は，その切断した枝に流れているフローを他の枝を通して i から j へ流してやればよい．つまり i から j への増加路を探すことになる．したがって，枝（i, j）の切断によって変化した最大流は，次のように求める．
① 枝（i, j）にフローが流れていればその流量を q とし②へ．流れていなければ終了．
② i から j に向かってラベリング法の要領で増加路を一本見つけ③へ．増加路が見つからなければ④へ．
③ 増加路の流量の総和 x が q と等しくなれば最大流は枝を切る前と変わらず操作は終了．等しくなければ②へ．
④ 切断した枝の流量すべてを他の枝で i から j へ流すことができなかったので，q-x の流量の分だけ i から s，j から t に向かって各枝の流量を減らし終了．

4.1.1 部分処理

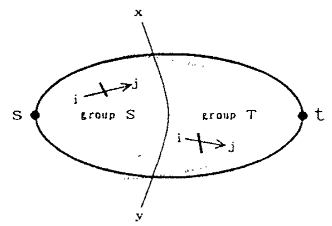

図 1

1）S 側の枝（i, j）を切断した場合
この場合，切断面（x, y）を越え T へ増加路を探していく必要はない．なぜなら，最大流最小切断定理より S から T に向かっている枝は，すべて飽和している枝となっているため，S から T に向かっている有用な枝は一つもないからである．したがって，増加路探索の対象となる点は S 側だけですむ．
2）T 側の枝（i, j）を切断した場合
切断面上の S から T へ向かう枝はすべて飽和しているので，それらは T から S には有用である．

An Algorithm of Maximum Flow by Network Reuse
Yoshihiko YAO, Kyoko IWASAWA, Mario NAKAMORI
Department of Computer Science, Tokyo University of Agriculture and Technology

そのため，i から j への増加路を探していくと，S 側まで増加路の探索をおこなってしまう場合がある．図 2のように切断面の T から S へ，枝（u,v）を通って（i,v,u...）と増加路を探索していくと，唯一枝（u,v）だけが S から T に向かう有用な枝となる．増加路は，最終的に j に達しなければならないので，v から S を通ってまた v へ戻ってくる増加路は無駄である．従ってこの場合も増加路探索の対象となる点は T 側だけである．

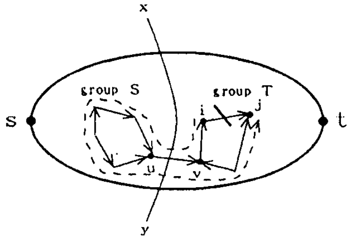

図 2

この考えは最小切断面が複数ある場合でも 1),2) より成り立つ．つまり枝を切断したときはそのグループ内のみの点を対象として，4.1 の作業を実行すればよい．

3) 最小切断面上の枝の切断

最大流最小切断定理より切断面上の枝の容量が最大流となるので，切断面上の枝を切断した場合はその枝の容量だけ最大流は減る．従って 4.1 の④だけを実行すればよい．これは最小切断面が複数ある場合も同じである．

4.2 枝が接続された場合

枝を接続したときの最大流を考える場合，接続する場所によっては最大流は変わらない．例えば最小切断面の両側の点を新たに枝で接続すれば最大流は増えるが，同じグループ同士の枝を結んだ場合（i, j),(m,n）は最大流は増加しない．しかも最大流量が増える場合も接続した枝の容量の分だけ最大流量が増加するとは限らない．なぜなら，[x,y] 上に新たな枝を加えることにより最小切断面が他の場所に移る場合もあるからである．

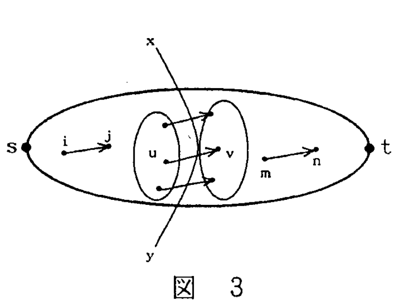

図 3

図 4のように最小切断面が複数ある場合はたとえ最小切断面上の枝を接続したとしても最大流は増えない．なぜなら，最大流最小切断定理より常に $\alpha = \beta + \gamma = \gamma + \delta$ となってなければならないので，いずれか一つの切断面上の流量を増やしても無駄であるからである．しかし，図 4の（1)の点と（4)の点を接続するような枝の場合は最大流は増える可能性がある．従って，枝を接続する際に最大流が増えるのは s を含むグループの点と t を含むグループの点を結んだ場合のみである．そのときの最大流の求め方は s から t に向かって増加路を探せばよい．このときに見つかる増加路の総流量は最大でも高々接続した枝の容量までである．

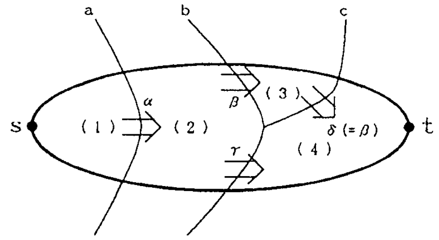

図 4

5. グループの変化

この考えではネットワークの点を常にグループに分けておく必要がある．そこでどのような場合にネットワークのグループが変化するかを考える．枝の切断でグループが変わるのは，(1)最小切断面上を S から T に向かう枝を切った場合，(2)グループ内の枝を切ったときにそこに流れているフローのすべてを他の道を通して流すことができなかった場合の二つである．枝を接続してグループが変わるのは，最小切断面上を S から T に向かう枝を接続した場合である．以上の場合だけ，3 の作業でグループ分けをやり直す．

6. おわりに

1本ずつ枝を切ったすべての組合せのネットワークについて最大流を求めたいときに，はじめから最大流を求め直すのではなく，ネットワークをグループ分けし，前のネットワークを利用し部分的に計算し直すだけで最大流を求める方法を提言した．今後は，1本ずつの枝を対象とするのではなく，似たような構造だが部分的に異なるネットワークについての算法を研究する計画である．

参考文献

[1] 伊理 正夫，腰塚 武志：bit 別冊 計算幾何学と地理情報処理，共立出版，1986

[2] 伊理 正夫，古林 隆：ネットワーク理論，日科技連出版社，1973