分離加法形式の数の限界式について

4H－7

巽 久行[+], 荒木 智行[+], 向殿 政男[++], 木澤 誠[+]
+ 神奈川工科大学 ++ 明治大学

1. まえがき

論理関数は，通常，加法形式と呼ばれる積項の論理和からなる論理式で表現される。加法形式のうち，特に各積項が互いに分離的であるものを分離加法形式と呼ぶ。

本報告は，分離加法形式の表現能力を判定する意味で，その数の限界式を考察する。積項が作る半順序集合の，互いに比較不可能な元からなる部分集合（これを反鎖と呼ぶ）は加法形式に1対1に対応することから，反鎖の各元が互いに分離的となる条件を限界式を導出する過程で制約することにより，分離加法形式の数の上限及び下限を導いている。

2. 分離加法形式における諸性質

各変数 $x_i(i=1,\cdots,n)$ と，論理演算 $AND(\cdot)$，$OR(\vee)$，$NOT(\sim)$ との有限回の結合で表現される式を，論理式という。変数 x_i は $\{0,1\}$ の値を取るので，論理式は $\{0,1\}^n$ から $\{0,1\}$ へのある論理関数 f を表現している。変数 x_i とその否定 $\sim x_i$ を文字といい，幾つかの文字をある変数について肯定，否定とが同時に現れないように論理積 (AND) で結合したものを積項という。α_i,α_j (但し, $i\neq j$)を2つの積項とするとき，

$$\alpha_i \subseteq \alpha_j \Leftrightarrow \alpha_j \text{の文字はすべて} \alpha_i \text{に現れる}$$

で積項同志の包含関係 $\subseteq$ が定義される。これよりn変数のすべての積項からなる集合は，包含関係 $\subseteq$ に関して半順序集合をなす。

[定義2.1]

f が積項の論理和 (OR) から構成される論理式 $f=\alpha_1\vee\cdots\vee\alpha_s$ において，各項が既約，即ち $\alpha_i \nsubseteq \alpha_j$ (但し, $i\neq j$)なるとき，f は加法形式で表現されているという [1]。加法形式において，特に各項が分離的，即ち $\alpha_i\cdot\alpha_j=0$ (但し, $i\neq j$)なるとき，f は分離加法形式で表現されているという [2]。 (定義終)

任意の論理関数 f に対して，それを表現する分離加法形式の数は一般に複数個存在する。今，集合 $\{0,1/2,1\}$ 及び，この集合のn個の直積 $\{0,1/2,1\}^n$ （これを V と記す）に、次のような半順序関係 $\prec$ を定義する。

[定義2.2]

a，b を $\{0,1/2,1\}$ の元とするとき，

$$a\prec b \Leftrightarrow a\le b\le 1/2 \text{ または } 1/2\le b\le a。$$

$\mathbf{a}=(a_1,\cdots,a_n)$，$\mathbf{b}=(b_1,\cdots,b_n)$ を V の元とするとき，

$$\mathbf{a}\prec\mathbf{b} \Leftrightarrow \forall i;\ a_i\prec b_i。$$ (定義終)

Bounds on the Number of Disjoint Disjunctive Forms

Hisayuki TATSUMI [+], Tomoyuki ARAKI [+],
Masao MUKAIDONO [++], Makoto KIZAWA [+]
+ Kanagawa Institute of Technology
++ Meiji University

これより，集合 V は半順序関係 $\prec$ に関して半順序集合をなす。ここで，V の元と積項との間に，次のような1対1対応が存在する。

[定義2.3]

$\mathbf{a}=(a_1,\cdots,a_n)\in V$ と，積項 $\alpha=x_1^{a_1}\cdot\cdots\cdot x_n^{a_n}$ とは，次のとき，互いに対応している。

$$a_i=1 \leftrightarrow x_i^{a_i}=x_i, \quad a_i=0 \leftrightarrow x_i^{a_i}=\sim x_i$$

$$a_i=1/2 \leftrightarrow x_i^{a_i}=1。$$ (定義終)

この対応より，積項についての命題はすべて半順序集合 V についての命題として解釈できる。

ある論理関数 f が包含する積項（f の内項）に対応する V の元からなる集合を，$V(f)$ と記す。半順序集合 $V(f)$ の極大元は f の主項に対応する元に等しく，$V(f)$ はその極大元の集合により一意に定まる。V の元 $\mathbf{a}=(a_1,\cdots,a_n)$ において，任意の要素 a_i $(i=1,\cdots,n)$ が0または1である個数がk個のものからなる集合を，ランクkの集合と呼び，V_k と記す。ここで，V_k の元の数（これを $|V_k|$ と記す）は，$|V_k|=2^k\binom{n}{k}$ である。V の極大元は集合 V_0 の元（即ち,最大元），極小元は集合 $V_n(=\{0,1\}^n)$ の元で，$\bigcup_k V_k=V$ である。特に V のうち，V_n の元を無視した集合を $V_{\bar{n}}$ と記すことにする。$V(f)$ の元についても同様に定義する。また V の元 $\mathbf{a}$ に現れるすべての1/2を，0または1で置き換えて得られる V_n の元からなる集合を $\mathbf{a}^*$ と記す。即ち，$\mathbf{a}^*=\{\mathbf{b}\in V_n|\ \mathbf{b}\prec\mathbf{a}\prec V\}$ である。

[定義2.3]

半順序集合 V の，任意の部分集合 $S=\{\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_s\}$ が全順序集合であるとき，即ち $\mathbf{a}_1\prec\cdots\prec\mathbf{a}_s$ が成り立つとき，集合 S は鎖であるといい，$|S|$ を鎖の長さと呼ぶ。また集合 S の任意の元が互いに比較不可能なとき，即ち，$\mathbf{a}_i\prec\mathbf{a}_j$ (但し, $i\neq j$)なるとき，集合 S は反鎖であるといい，$|S|$ を反鎖の大きさと呼ぶ。特に，各元が分離的，即ち $\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{a}_j=0$ (但し, $i\neq j$)なるとき，S は分離的反鎖で表現されていると呼ぶ。 (定義終)

ここで，分離加法形式と分離的反鎖との間に，次の定理が成り立つ。

[定理2.1]

ある論理関数 f を表現する分離加法形式と，

$$\mathbf{a}_1^*\cup\cdots\cup\mathbf{a}_s^*=V_n(f) \qquad \cdots (1)$$

$$\sum_i|\mathbf{a}_i^*|=\left|\bigcup_i\mathbf{a}_i^*\right| \qquad \cdots (2)$$

を満たす $V(f)$ の分離的反鎖 $\{\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_s\}$ とは，1対1に対応する。

（証明）$\alpha_1\vee\cdots\vee\alpha_s$ を，f を表現するn変数の1つの分離加法形式とする。$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ に対応する $V(f)$ の元を各々 $\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_s$ とすると，$\alpha_i\nsubseteq\alpha_j$ より $\mathbf{a}_i\nprec\mathbf{a}_j$ となるので，

集合$\{\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_s\}$は$V(f)$の１つの反鎖である。更にこの反鎖に対して，集合$\{\mathbf{a}_1^*,\cdots,\mathbf{a}_s^*\}$は$f$を表現しているから式(1)が成立し，かつ，$\alpha_i\cdot\alpha_j=0$より$\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{a}_j=0$であるからこの反鎖は分離的で$\left|\mathbf{a}_i^*\right|+\left|\mathbf{a}_j^*\right|=\left|\mathbf{a}_i^*\cup\mathbf{a}_j^*\right|$，よって式(2)が成立する。逆も同様である。（証明終）

以上により，ある論理関数fを表現する分離加法形式の数を求める問題は，$V(f)$の分離的反鎖$\{\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_s\}$のうち，それらが包含する$V_n$の元の集合が，

$$V_n(f)=\{\mathbf{b}\in V_n|\ f(\mathbf{b})=1\} \quad \cdots (3)$$

と一致するものを求める問題に帰着された。特にｎ変数論理関数のすべての分離加法形式の数を求めるには，式(3)より集合Vのすべての分離的反鎖を求めればよい。

$V(f)$のうち，V_nの元からなる集合を無視した集合を$V_{\bar{n}}(f)$とすると，定理２.１は次のように若干改良できる。

[定理２.２]

ある論理関数fを表現する分離加法形式の数は，半順序集合$V_{\bar{n}}(f)$に存在する分離的反鎖の数に等しい。

（証明）定理２.１を満たす$V(f)$の分離的反鎖$\{\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_s\}$から$V_{\bar{n}}(f)$の１つの分離的反鎖が，$V_n$の元を省くことにより一意に定まる。逆に，$V_{\bar{n}}(f)$の任意の分離的反鎖$\{\mathbf{a}_1',\cdots,\mathbf{a}_s'\}$に対して，定理２.１を満たすように$V_n$の元を加えれば$V(f)$の分離的反鎖が一意に定まる。よって，両者の数は等しい。（証明終）

定理２.２より，ｎ変数のすべての分離加法形式の数を求める問題は，集合$V_{\bar{n}}$の分離的反鎖の数を求める問題に帰着された。

３．限界式

本節では，これまで知られている加法形式の数の限界式をもとに，分離加法形式の数の限界式を導出する。
以下，ｎ変数のすべての分離加法形式の数を$D(n)$とする。

３.１　上限

半順序集合$V_{\bar{n}}$に含まれる最大の反鎖の大きさがmであるとき，ディルウォースの定理[3]より，$V_{\bar{n}}$はm個の互いに素な鎖に分割される。各鎖には最大元（即ちV_0の元）も含めて多くともn個の元が存在する。m個の鎖の中から高々１個の元を選んで大きさsの分離的反鎖を作る場合，最大の分離的反鎖の大きさは2^nより，$0\le s\le 2^n$である。もし最大元がこの分離的反鎖に含まれれば他の元はすべて包含されるので無視することにすると，各鎖には多くとも$n-1$個の元が存在する。これより，$D(n)$の上限として次式を得る。

$$D(n)<\binom{m}{2^n}\cdot\sum_s\binom{2^n}{s}(n-1)^s$$

$m=\max_k|V_k|$として，このときのkを$l\ (\approx\lceil 2n/3\rceil)$とおいて上式を２項定理で展開すると，次式を得る。

$$D(n)<\binom{|V_l|}{2^n}\cdot 2^{2^n\log_2 n},$$

但し，$\dfrac{3}{2\sqrt{\pi}}\cdot\dfrac{3^n}{\sqrt{n}}\left(1+\dfrac{c_1}{n}\right)\le|V_l|\le\dfrac{3}{2\sqrt{\pi}}\cdot\dfrac{3^n}{\sqrt{n}}\left(1+\dfrac{c_2}{n}\right)$

（c_1,c_2は定数）

である。

３.２　下限

半順序集合$V_{\bar{n}}$の，２つの隣接されたランクkの集合V_k（但し，$|V_k|=2^k\binom{n}{k}$）とランク$k+1$の集合V_{k+1}（但し，$|V_{k+1}|=2^{k+1}\binom{n}{k+1}$）について，$V_k$に存在する$\binom{n}{k}$個の各集合$2^k$は，$V_{k+1}$に存在する$\binom{n}{k+1}$個の中の$\binom{n-k}{1}$個の集合$2^{k+1}$を包含する。ここで$V_k$に存在する集合$2^k$の各元は互いに分離的，同様に$V_{k+1}$に存在する集合$2^{k+1}$の各元も互いに分離的であり，集合$2^k$に含まれる各元は集合$2^{k+1}$の２個の元を必ず包含する。これより，集合$2^k$に含まれる$t$個の元（但し，$1\le t\le 2^k$）に包含される集合$2^{k+1}$の$2t$個の元を除いた残りの$(2^{k+1}-2t)$個の各元は，互いに分離的である。よって，これから作られる部分集合はすべて分離的反鎖となるので，分離加法形式の下限として次式を得る。

$$D(n)>\binom{n}{k}\cdot\sum_{t=1}^{2^k}\left\{\binom{2^k}{t}\binom{n-k}{1}2^{2^{k+1}-2t}\right\}+\binom{n}{k+1}2^{2^{k+1}}$$
$$=(n-k)\binom{n}{k}2^{2^{k+1}}\cdot\left\{\sum_t\binom{2^k}{t}\left(2^{-2}\right)^t-\frac{k}{k+1}\right\}$$

ここで$k=n-1$として，上式を２項定理で展開すると次式を得る。

$$D(n)>n\cdot 2^{2^n}\cdot\left\{\left(\frac{5}{4}\right)^{2^{n-1}}-\frac{n-1}{n}\right\}$$
$$\left(\approx n\cdot 2^{2^n\log_2\sqrt{5}}\ ;\ n>>1\right)$$

４．あとがき

本報告は，最小項を除いた積項が作る半順序集合と同型である半順序集合$V_{\bar{n}}$に分離的反鎖を定義することで，分離加法形式の数の限界式を考察した。半順序集合$V_{\bar{n}}$はSpernerの定理[3]が成立することが示されるので，単調関数の限界式に利用されているGilbertの手法[4]を上限に，Shapiroの手法[4]を下限に，本報告でもそれぞれ適用している。しかしながら，上限と下限の差を見る限り，あまり良い限界式であるとはいえない。

参考文献

[1] 巽，向殿：ブール加法形式の数え上げ問題，信学論(D)，Vol. J66-D，No.10，(1983).
[2] 高橋，向殿：論理関数の分離加法形式による表現とその応用，信学論(D)，Vol. J69-D，No.8，(1983).
[3] Birkoff, G.：Lattice theory，Amer. Math. Soc.，(1967).
[4] Gilbert, E. N.：Lattice theoric properties of frontal switching function，J. Math. Phys.，33，(1954).
[5] Shapiro, H. N.：On the counting problem for monotone Boolean function，Comm. Pure Appl. Math.，Vol.23，(1970).