

一次分数変換を利用した連立代数方程式の 近接根の分離と擬局所化における誤差について

鈴木 秀 男[†] 小林 英 恒^{††}

一般に、連立代数方程式が重根や近接根を持つ場合、数値計算によりそれらの根を求めようとする、どうしても数値的な安定性が問題になり、精度が悪く信頼できない数値が得られることがある。そこで筆者らは、このような問題点を解決するために、一次分数変換を利用する方法を提案する。この方法は、微小領域内の重根や近接根付近を拡大するとともに、それらの根から離れている根を、ある特定の超平面に近づけるといった性質を持っている。この性質を利用して、微小領域から離れた根の値が得られていなくとも多項式の次数を下げるができる。この報告では、以上のことを中心に、一次分変換による誤差、擬局所化にともなう誤差、擬局所化による根の移動等について述べる。

Separation of Roots by a Linear Fractional Transformation and Error Analysis of Pseudo-localization

HIDEO SUZUKI[†] and HIDETSUNE KOBAYASHI^{††}

It is hard to calculate with high accuracy a root to a system of algebraic equations when the root has high multiplicity or the root is one of the roots locating very near by each other. We propose to use a linear fractional transformation to resolve such problem. A linear fractional transformation expands a domain containing roots located very close to each other and other solutions remote from the roots contained in the domain is transformed to points very near to a specified hyper plane decided naturally by the transformation. By using this property, we can make a new system of algebraic equations with lower degree which has very good approximation to the original root to be obtained. We analyze numerical errors arisen by the linear fractional transformation and arisen by making a new system of algebraic equations.

1. はじめに

筆者らは、これまで数値計算によって連立代数方程式の解の重複度を求めることを研究してきた^{1)~3)}。その成果として真の重複度を数値計算により、プラス方向とマイナス方向から挟み込む方法を考案した。しかし、アルゴリズムの性質上、非常に近接した根が現れる可能性があり、これらの根を分離できなければ、元の問題の根の重複度が計算できないことになる。そこで、近接根の分離方法を研究することになった。

一般に、連立代数方程式が重根や近接根を持つ場合、数値計算によりそれらの根を求めようとする、どうしても数値的な安定性が問題になり、精度が悪くな

てしまう。

筆者らはすでに近接根を分離するための1変数の場合における一次分数変換の型と擬局所化による誤差を報告し^{4)~8)}、多変数の場合の一次分数変換と擬局所化の有効性についても報告している^{9)~12)}。一次分数変換による方法は、与えられた連立代数方程式を代数的に変換し、変換された連立代数方程式を解くことにより得られた近似値を逆変換し、元の問題の近似値を得ようとするものである。この変換は、近接根を分離するために近接根付近を拡大するが、さらに近接根から離れている根を特定の超平面の近くへ移動させるという性質がある。そして、この性質を用いることにより、根の近似値が得られていなくとも近接根から離れた根を捨て去ることにより、多変数の場合でも近接根に対応する近似解を持つ低次の方程式系を導く減次が可能であり擬局所化が行えることになる。

この報告では、一次分数変換を利用し連立代数方程式の近接根を分離するための具体的な変換の型と変換による誤差について述べ、連立代数方程式の解を重根・

[†] 職業能力開発総合大学校東京校情報技術科

Department of Information Technology, Institute of Tokyo, Polytechnic University

^{††} 日本大学理工学部数学科

Department of Mathematics, College of Science and Technology, Nihon University

近接根も含め高精度で計算できることを示す。さらに、擬局所化による誤差評価を与え、ある条件の下で擬局所化の誤差が保証されることも示す。そして、これらの結果から近接根が確実に分離され、しかも擬局所化による誤差を把握することができ、さらに数値計算での高速化も図れることが分かる。

一方、筆者らのように連立代数方程式の近接根を分離するために一次分数変換を適用した例はなく、別の方法で代数方程式の近接根を分離する方法が文献(13)に述べられている。また、連立代数方程式の数値解法であるホモトピー法^{(14)~(16)}は、数値解を統一的に求めるために有効な手段であり、注意深くパスを追跡することによりある程度は近接根にも対応可能であることを筆者らは確認している。しかし、いずれにしても今回筆者らが行ったような微小領域内に連立代数方程式の近接根が存在するような場合への適用例はこれまでのところ見あたらない。

2. 一次分数変換

n 次元複素射影空間 $P^n(C)$ の斉次座標系 $(X_0 : X_1 : \dots : X_n)$ を用いて表現された m 次斉次多項式 $F(X_0, X_1, \dots, X_n)$ を、 $n + 1$ 次正則行列 $A = (a_{ij})_{0 \leq i, j \leq n}$ に対応する射影変換 P_A

$$P_A : (X_0 : X_1 : \dots : X_n) \rightarrow \left(\sum_{i=0}^n a_{0i} X_i : \sum_{i=0}^n a_{1i} X_i : \dots : \sum_{i=0}^n a_{ni} X_i \right) \quad (1)$$

により変換する。行列 A の逆行列 A^{-1} を考えることにより、逆変換 $P_A^{-1} = P_{A^{-1}}$ も同様に定義される⁽¹⁷⁾。

このとき、連比にアフィン空間 C^n の点

$$(x_1, \dots, x_n) = (X_1/X_0, \dots, X_n/X_0)$$

を対応させることで射影空間の点とアフィン空間の点とが対応付けられる。いまアフィン空間 C^n での d 次多項式を $f(x_1, \dots, x_n)$ とすれば、

$$F(X_0, X_1, \dots, X_n) = X_0^d f(X_1/X_0, X_2/X_0, \dots, X_n/X_0)$$

によって $P^n(C)$ の d 次斉次多項式を得る。そして、この多項式を射影変換したものを $G(U_0, U_1, \dots, U_n)$ とすれば、 $A^{-1} = (\tilde{a}_{ij})_{0 \leq i, j \leq n}$ として

$$G = F(\tilde{a}_{00}U_0 + \tilde{a}_{01}U_1 + \dots + \tilde{a}_{0n}U_n, \dots, \tilde{a}_{n0}U_0 + \tilde{a}_{n1}U_1 + \dots + \tilde{a}_{nn}U_n)$$

となる。そして、 $u_1 = U_1/U_0, \dots, u_n = U_n/U_0$ として、この G をアフィン空間 C^n へ戻せば、

$$g(u_1, \dots, u_n) = G(U_0, U_1, \dots, U_n)/U_0^d$$

が得られる。すなわち、アフィン空間での各座標は一次分数変換の形で与えられ $(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (1 : x_1 : x_2 : \dots : x_n) \rightarrow (U_0 : U_1 : \dots : U_n) \rightarrow (u_1, u_2, \dots, u_n)$ という対応関係がある。そして、 $n+1$ 次正則行列 A の選び方により各種の一次分数変換が存在することになる。

射影変換をうまく選んで超平面 $U_0 = \sum_{i=0}^n a_{0i} X_i = 0$ は、元の方程式の根を含まないようにとって、この超平面 $U_0 = 0$ を新たな無限遠超平面とするとき有限部分での方程式の根が元の方程式の根と重複度も含めて1対1に対応する。

3. 一次分数変換の型

連立代数方程式

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

が与えられたとき、それらの根を $\xi_j \in C^n (j = 1, \dots, m)$ とする。ある点 $\alpha \in C^n$ を固定したとき、十分小さな $\epsilon > 0$ に対して、根 $\xi_j (j = 1, \dots, r)$ が領域 $R = \{z \in C^n, \|z - \alpha\| < \epsilon\}$ に含まれるとき、これらの根 $\xi_j (j = 1, \dots, r)$ を (近接度 ϵ) の近接根と呼ぶ。 ϵ の値が小さく、 r の個数が大きければ数値的にこれらの近接根が紛れてしまい分離が難しくなる。

このような近接根を分離するための具体的な一次分数変換の型を示す。ここで、 $x = (x_1, \dots, x_n) \in C^n$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in C^n$ とする。はじめに、分離したい根の範囲を定める。分離領域を決めるには、実部と虚部をそれぞれ別々に考えて、個々の領域を矩形領域とすることもできるが、ここでは、実部と虚部を区別せずに1つのパラメータとして表すために ϵ 近傍を利用する。

適当な複素数 α と実数 ϵ に対し

$$W(\alpha; \epsilon) = \{z \in C \mid |z - \alpha| < \epsilon\}$$

とするとき、複素数 α_j と1より小さい正の実数 $\epsilon_j, j = 1, \dots, n$ に対し

$$W = W(\alpha_1; \epsilon_1) \times \dots \times W(\alpha_n; \epsilon_n)$$

とし、この領域にある根を分離する。

すでに述べたことであるが式(1)の係数のとり方により様々な型の一次分数変換が存在するが、ここでは、一次分数変換の具体的な型として

$$\sum_{j \in I} X_j + \sum_{j \in I'} (\gamma_j - \alpha_j) X_0 = 0$$

を新たな無限遠超平面に変換するような射影変換を考える。ただし、この超平面上に連立代数方程式の根は

存在しないものとする。ここで、 I は添字の集合であり、 $\gamma_j = k_j \epsilon_j$ ($k_j \geq 1$) である。集合 I の選び方により、種々の無限遠超平面を決めることができる。

逆に、もとの無限遠超平面 $X_0 = 0$ は、

$$U_0 - \sum_{j \in I} U_j = 0$$

に射影変換により移される。

このような一次分数変換は、射影変換に用いる $n+1$ 次正則行列 A を

$$\begin{pmatrix} \sum_{j \in I} (\gamma_j - \alpha_j) & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \cdots & \delta_n \\ -\alpha_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_2 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \end{pmatrix}$$

と選べばよく、この射影変換の逆写像は、行列 A^{-1} を

$$\begin{pmatrix} 1 & -\delta_1 & -\delta_2 & \cdots & -\delta_n \\ \alpha_1 & p_1 & -\alpha_1 \delta_2 & \cdots & -\alpha_1 \delta_n \\ \alpha_2 & -\alpha_2 \delta_1 & p_2 & \cdots & -\alpha_2 \delta_n \\ \vdots & & & & \end{pmatrix}$$

と選べばよい。ここに、

$$p_i = \sum_{j \in I} \gamma_j - \alpha_i \delta_i, \delta_i = \begin{cases} 1 & (i \in I) \\ 0 & (i \notin I) \end{cases}$$

である。以下、すべてこの型の一次分数変換を利用する。

たとえば、2変数の場合の一次分数変換の例を示す。 $I = \{1\}$ とすれば、次のような一次分数変換となる。

$$\begin{aligned} u_1 &= (x_1 - \alpha_1)/(x_1 - \alpha_1 + \gamma_1) \\ u_2 &= (x_2 - \alpha_2)/(x_1 - \alpha_1 + \gamma_1) \end{aligned}$$

この逆変換は

$$\begin{aligned} x_1 &= (\gamma_1 u_1 - (u_1 - 1)\alpha_1)/(1 - u_1) \\ x_2 &= (\gamma_1 u_2 - (u_1 - 1)\alpha_2)/(1 - u_1) \end{aligned}$$

である。また、 $I = \{2\}$ のときは

$$\begin{aligned} u_1 &= (x_1 - \alpha_1)/(x_2 - \alpha_2 + \gamma_2) \\ u_2 &= (x_2 - \alpha_2)/(x_2 - \alpha_2 + \gamma_2) \\ x_1 &= (\gamma_2 u_1 - (u_2 - 1)\alpha_1)/(1 - u_2) \\ x_2 &= (\gamma_2 u_2 - (u_2 - 1)\alpha_2)/(1 - u_2) \end{aligned}$$

となり、 $I = \{1, 2\}$ のときは

$$\begin{aligned} u_1 &= (x_1 - \alpha_1)/(x_1 - \alpha_1 + \gamma_1 + x_2 - \alpha_2 + \gamma_2) \\ u_2 &= (x_2 - \alpha_2)/(x_1 - \alpha_1 + \gamma_1 + x_2 - \alpha_2 + \gamma_2) \\ x_1 &= ((\gamma_1 + \gamma_2)u_1 - (u_1 + u_2 - 1)\alpha_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &/(1 - u_1 - u_2) \\ x_2 &= ((\gamma_1 + \gamma_2)u_2 - (u_1 + u_2 - 1)\alpha_2) \\ &/(1 - u_1 - u_2) \end{aligned}$$

となる。

4. 根の移動

具体的な一次分数変換の型が定まったので、これらの変換により元の空間での根がどのように変換されるかを考察する。

一般の点 $x = (x_1, \dots, x_n)$ は

$$u_j = (x_j - \alpha_j) / \sum_{l \in I} (x_l - \alpha_l + \gamma_l) \quad (3)$$

を座標に持つ点 $u = (u_1, \dots, u_n)$ へ変換される。

領域 W に含まれる点については、その座標が $x_j = \alpha_j + c_j \epsilon_j$ ($c_j \in C, |c_j| \leq 1$) と書けるから

$$u_j = c_j \epsilon_j / \left(\sum_{l \in I} (k_l + c_l) \epsilon_l \right) \quad (4)$$

となる。 $|c_l| \leq 1, \epsilon_l \ll 1$ であるから k の値をある程度大きくしても、各 u_j は元の空間での値に比べ分離されていることが分かる。とくに $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \dots = \epsilon$ のときは

$$u_j = c_j / \sum_{l \in I} (k_l + c_l) \quad (5)$$

となり ϵ に関係しない。 k の値により微小領域が拡大される様子を表 1, 表 2 に示しておく。

また領域 W に含まれない点については

表 1 一次分数変換による区間拡大の様子 ($n = 2, \alpha_1 = \alpha_2 = 0, \epsilon_1 = 1/10000, \epsilon_2 = 1/100000, I = \{1\}$)

Table 1 Enlarged interval by a linear fractional transformation. ($n = 2, \alpha_1 = \alpha_2 = 0, \epsilon_1 = 1/10000, \epsilon_2 = 1/100000, I = \{1\}$)

k の値	拡大された区間
10	$-1/9 \leq u_1 \leq 1/11$ $-1/90 \leq u_2 \leq 1/110$
100	$-1/99 \leq u_1 \leq 1/101$ $-1/990 \leq u_2 \leq 1/1010$

表 2 一次分数変換による区間拡大の様子 ($n = 2, \alpha_1 = \alpha_2 = 0, \epsilon_1 = \epsilon_2, I = \{1\}$)

Table 2 Enlarged interval by a linear fractional transformation. ($n = 2, \alpha_1 = \alpha_2 = 0, \epsilon_1 = \epsilon_2, I = \{1\}$)

k の値	拡大された区間
10	$-1/9 \leq u_1 \leq 1/11$ $-1/9 \leq u_2 \leq 1/11$
100	$-1/99 \leq u_1 \leq 1/101$ $-1/99 \leq u_2 \leq 1/101$

$$\sum_{j \in I} u_j = 1 / \left(1 + \sum_{l \in I} \gamma_l / \sum_{l \in I} (x_l - \alpha_l) \right)$$

となり、 $O(\sum \gamma_l / \sum (x_l - \alpha_l))$ の割合で右辺の値は 1 へ近づくことが分かる。ゆえに領域 W に含まれない点は、領域から離れるほど、あるいは ϵ が小さくなるほど超平面 $1 - \sum_{j \in I} u_j = 0$ に近づくことになる。

一方、一次分数変換された方程式を解いた数値解を元の方程式の解へ変換するには

$$x_i = \left(\sum_{j \in I} \gamma_j u_j - \left(\sum_{j \in I} u_j - 1 \right) \alpha_i \right) / \left(1 - \sum_{j \in I} u_j \right) \tag{6}$$

を利用すればよい。

5. 一次分数変換による誤差と計算法

すでに述べてきたように一次分数変換を用いると近接根を分離することができる。ここでは、はじめに一次分数変換された方程式の数値解と元の方程式の解との関係を述べる。次に、一次分数変換を繰り返し適用することにより、単根・近接根・重根が高精度に計算される方法を示す¹⁸⁾。

以下では、近接根領域を決定する $\epsilon > 0$ は十分小さく、近接根以外の根は近接根領域から十分離れているものとする。また、添え字の集合 I は与えられた近接根領域を表す e_j ($j = 1, \dots, n$) を用いて

$$\epsilon_j \ll \sum_{l \in I} (k_l - 1) \epsilon_l \tag{7}$$

を満たすように選んでおく。

5.1 一次分数変換による誤差

式(2)で与えられる連立代数方程式を一次分数変換したものを

$$\begin{cases} g_1(u_1, \dots, u_n) = 0 \\ \dots \\ g_n(u_1, \dots, u_n) = 0 \end{cases} \tag{8}$$

と表す。ここで、 $u = (u_1, \dots, u_n) \in C^n$, $g(u) = (g_1(u), \dots, g_n(u)) \in C^n$ とするとき、次が成り立つ。

命題 5.1 $g(u) = 0$ の近接根に対する近似解の 1 つを $u^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)$ とし、それに対する厳密解 $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n)$ との差を $\Delta u_j = |u_j^* - \tilde{u}_j|$ とする。また、 u^* を元の空間へ逆変換したものを $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$, それに対する厳密解 $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ との差を $\Delta x_j = |x_j^* - \tilde{x}_j|$ とおくと、次が成り立つ。

$$\Delta x_j \sim \sum_{l \in I} \gamma_l \Delta u_j$$

ただし、 I は添字の集合であり、 $\gamma_l = k_l \epsilon_l$ ($k_l \geq 1$) である。また、この論文における記号 $A \sim B$ とは A と B が近似的に等しいことを表すものとする。

[証明] 適当な座標シフトで原点中心の一次分数変換とできるので $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = 0$ とする。このとき式(6)より

$$\Delta x_j = |x_j^* - \tilde{x}_j| = \left| \sum_{l \in I} \gamma_l u_l^* / \left(1 - \sum_{l \in I} u_l^* \right) - \sum_{l \in I} \gamma_l \tilde{u}_l / \left(1 - \sum_{l \in I} \tilde{u}_l \right) \right|$$

を得る。ここで近接根を考えているので、式(4)、(7)より $|u_l^*| \ll 1, \dots, |u_n^*| \ll 1$ である。ゆえに、上式は

$$\Delta x_j \sim \left| (u_j^* - \tilde{u}_j) \sum_{l \in I} \gamma_l \right| = \sum_{l \in I} \gamma_l \Delta u_j$$

のようになる。

とくに、 $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \dots = \epsilon$ であれば式(5)より

$$\Delta x_j \sim \sum_{l \in I} k_l \Delta u_j \epsilon$$

となる。

これを相対誤差評価で考えると、 $\Delta x_j / |\tilde{x}_j| \sim \Delta u_j / |\tilde{u}_j|$ となることは明らかである。したがって、変換された方程式を解いて、その近似解を元の空間へ戻しても、精度は変換された空間で解いたときの精度と相対誤差評価において同程度となることが保証される。このことは、通常の数値計算で分離が困難であるような微小領域内の近接根、すなわち ϵ が十分小さいような領域内にある根でも確実に分離され、しかも精度が一次分数変換を行っても保証されることを意味している。これにより、通常の数値計算で分離が困難な場合でも一次分数変換が有効であることが分かる。

5.2 一次分数変換を利用した計算法

原点が連立代数方程式の根になっている場合を考えると、原点中心の一次分数変換では、原点は原点に変換されるので、得られた近似解が直接に原点からの誤差を表すことになる。同じ収束条件で計算されるのであれば、命題 5.1 より変換された空間で解いた近似解を逆変換により元の空間へ戻した方が $\sum \gamma_l$ 倍だけ値が原点に近づくことになる。したがって、元の空間で解いたときの近似解 $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ の原点からの誤差を $\Delta \tilde{x}_j = |\tilde{x}_j|$ と表現すれば、 $\Delta \tilde{x}_j > \Delta x_j = |x_j^*|$ が成り立ち、一次分数変換を適用して解いた方が精度が

良いことになる。

一方、原点以外の根の近似解が得られているときに、近似解の精度を向上させるには、適当な座標シフトを行い、原点周りで根を計算すればよい。このとき、一次分数変換を適用すれば、原点周りにシフトをすると同時に、それ以外の根を特定の超平面の近くへ変換し、後に述べる擬局所化が行え、計算時間の短縮が図れることになる。ゆえに

$$\sum \gamma_i^{(0)} < 1$$

を満たす領域から計算を始め、得られた近似解から

$$\sum \gamma_i^{(1)} < \sum \gamma_i^{(0)}$$

となる $\gamma_i^{(1)}$ を決める。

以下同様の繰返し計算を行う。具体的なアルゴリズムを次に示す。

[近接根分離のためのアルゴリズム]

- (1) 連立代数方程式 $f_1 = 0, \dots, f_n = 0$ を与える。
- (2) パラメータ $\alpha_j, \epsilon_j, k_j$ を決める。
- (3) 多項式系を一次分数変換し、変換された多項式を g_1, \dots, g_n とする。
- (4) 変換された方程式系 $g_1 = 0, \dots, g_n = 0$ を解く。
- (5) 得られた近似解を逆一次分数変換する。
- (6) 十分良い近似解が得られれば終了。
- (7) パラメータ $\alpha_j, \epsilon_j, k_j$ を再決定してステップ(3)へ。

パラメータを決める方法として、与えられた方程式系を精度を多少犠牲にして、粗く・高速に解いた近似値を採用する。ここで、 α_j は分離したい近接根や高精度で計算をしたい根を含む領域内で、得られた近似解の平均(重心)をとり、 ϵ_j は、その値からそれぞれの近似解へのずれの最大値とすればよい。

6. 擬局所化による誤差と根の移動

はじめに、擬局所化について説明し、擬局所化を用いると低次の方程式を導くことができることを述べる。そして、擬局所化にともなう誤差について考察する。最後に、擬局所化による根の移動について述べ、ある条件の下で擬局所化による誤差が保証されることを述べる。

6.1 擬局所化による誤差

局所化とは、可換環 A とその素イデアル p が与えられたとき、 p に含まれない元を逆元として A に付け加えることをいう。これを方程式の言葉でいうと、ある一定の根を持つ方程式以外は、根を持たない方程

式として扱うことといえる。数値的な方法でも、これに似た操作を行うことができる。つまり、与えられた連立代数方程式から特定の条件で決まる根を取り除いた新しい連立代数方程式を構成することができる。この操作を、擬局所化という。この新しい連立代数方程式は、根の取り除き方により次数が低下する(減次という)。以下では、擬局所化といえ、特定の多項式を減次した、新しい連立代数方程式を構成する操作を表すものとする。

一次分数変換により変換された連立代数方程式は、近接根付近が拡大される。また、近接根から十分離れた根は、ある特定の超平面の近くに集まる。この性質を利用することによって、擬局所化が行える。具体的には、超平面が $p(u) = 0$ で与えられているとき $i \in I$ で u_i について、元の多項式 $g_j(u)$ を減次するとは、

$$g_j(u) = h_j(u)p(u) + r(\bar{u})$$

により行われる。ただし、

$$\bar{u} = (u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n)$$

とする。この式の意味するところは、 u_i を主変数と見なし他の変数を副変数とし、形式的に u_i についての1変数と見なし除算を行うことである。そして、 $g_j(u)$ の代わりに、この $h_j(u)$ をメンバーとする新たな連立代数方程式を考えることを擬局所化と呼ぶのである。このような操作を繰り返して適用することにより、さらに次数を減らすことができる。

一次分数変換された連立代数方程式 $g(u) = 0$ の近接根を $\bar{u}_l \in C^n$ ($l = 1, \dots, \nu$) とし、多項式 $g_j(u)$ を減次したものを $h_j(u)$ とする。このとき、多項式 $g_j(u)$ を $h_j(u)$ で置き換えた新たな連立代数方程式を $\bar{g}(u) = 0$ とするとき、擬局所化可能性を次のように定義する。

定義 6.1 新たな連立代数方程式 $\bar{g}(u) = 0$ が $\bar{g}(\bar{u}_l + \Delta_l) = 0$ を満たすとき、十分小さな $\eta > 0$ に対し

$$\max_{1 \leq l \leq \nu} \|\Delta_l\| < \eta$$

が成り立つとき、擬局所化可能と定義する。 ■

擬局所化可能であるとき、その近似解の擬局所化による誤差について次の命題が成り立つ。なお、以下の議論では、多項式全体の次数と減次する変数の次数が等しい ($\deg(f_\nu) = \deg(f_\nu, x_r)$) ものとする。

命題 6.1 連立代数方程式 $g(u) = 0$ が擬局所化可能であり、 $g(u) = 0$ の近接根の1つを $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n) \in C^n$ とするとき、 $g(\bar{\alpha}) = 0$ が成り立つものとする。さらに、多項式は u_τ ($\tau \in I$) で減次されるものとする。このとき、擬局所化された連立代数方程式 $\bar{g}(u) = 0$ が $\bar{g}(\bar{\alpha} + \Delta) = 0$ を満たすとき、 $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_n) \in C^n$

は, g_i を減次するとき

$$b_i = \gamma_I^{m_i} g_{i:m_i}(\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_{\tau-1}, L, \tilde{\alpha}_{\tau+1}, \dots, \tilde{\alpha}_n) \\ (g_{i:m_i} \text{ は } m_i \text{ 次の項を集めたもの}) \quad (9)$$

$$p_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial u_j}(\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_n)$$

$$q_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial u_j}(\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_{\tau-1}, L, \tilde{\alpha}_{\tau+1}, \dots, \tilde{\alpha}_n) \\ (j \neq \tau)$$

$$q_{i\tau} = 0$$

$$L = 1 - \sum_{l \in I, l \neq \tau} \tilde{\alpha}_l$$

とし, 減次しないとき

$$b_i = 0$$

$$p_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial u_j}(\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_n)$$

$$q_{ij} = 0$$

として

$$\begin{pmatrix} p_{11} - q_{11} & \cdots & p_{1n} - q_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} - q_{n1} & \cdots & p_{nn} - q_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (10)$$

という連立方程式により与えられる. ただし, 係数行列の行列式の値は 0 でないとする.

[証明] 近接根は, 適当な座標シフトにより原点周りに移動できるので, 原点周りの近接根について考える. n 変数多項式 $f_i(x)$ ($x = (x_1, \dots, x_n)$) を

$$f_i(x) = \sum_{d=0}^{m_i} f_{i:d}(x) \\ f_{i:d}(x) = \sum_{i_1 + \dots + i_n = d} a_{i_1 \dots i_n}^{(i)} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$$

と表す. 近接根は原点周りに存在しているので, 一次分数変換は式 (3), (6) において $\alpha_j = 0$ として

$$x_i = \sum_{l \in I} \gamma_l u_l / \left(1 - \sum_{l \in I} u_l \right)$$

$$u_j = x_j / \sum_{l \in I} (x_l + \gamma_l)$$

となる. 元の多項式は, この一次分数変換により

$$\gamma_I = \sum_{l \in I} \gamma_l, u_I = \sum_{l \in I} u_l$$

として

$$g_i(u) = \sum_{d=0}^{m_i} \gamma_I^d (1 - u_I)^{m_i - d} g_{i:d}(u) \quad (11)$$

$$g_{i:d}(u) = \sum_{i_1 + \dots + i_n = d} a_{i_1 \dots i_n}^{(i)} u_1^{i_1} \cdots u_n^{i_n}$$

と変換される. このとき, 多項式の減次は

$$\tilde{u} = (u_1, \dots, u_{\tau-1}, u_{\tau+1}, \dots, u_n)$$

として

$$g_i(u) = h_i(u)(1 - u_I) + r_i(\tilde{u})$$

により行われるので $r_i(\tilde{u})$ は

$$r_i = g_i(u_1, \dots, u_{\tau-1}, L, u_{\tau+1}, \dots, u_n)$$

$$L = 1 - \sum_{l \in I, l \neq \tau} u_l$$

となる. 次に

$$\tilde{\alpha} = (\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_{\tau-1}, \tilde{\alpha}_{\tau+1}, \dots, \tilde{\alpha}_n)$$

$$\tilde{\Delta} = (\Delta_1, \dots, \Delta_{\tau-1}, \Delta_{\tau+1}, \dots, \Delta_n)$$

とし, $g_i(\tilde{\alpha}) = 0$ のとき $h_i(\tilde{\alpha} + \tilde{\Delta}) = 0$ とすれば

$$g_i(\tilde{\alpha} + \tilde{\Delta}) = r_i(\tilde{\alpha} + \tilde{\Delta})$$

が成り立つ. ここで

$$g_i(\tilde{\alpha} + \tilde{\Delta}) = g_i(\tilde{\alpha}) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial u_j}(\tilde{\alpha}) \Delta_j + \cdots \\ = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial u_j}(\tilde{\alpha}) \Delta_j + \cdots$$

と展開でき, また

$$r_i(\tilde{u}) = g_i(u_1, \dots, u_{\tau-1}, L, u_{\tau+1}, \dots, u_n)$$

であるから

$$r_i(\tilde{\alpha} + \tilde{\Delta}) = r_i(\tilde{\alpha}) + \sum_{\substack{j \neq \tau \\ j=1}}^n \frac{\partial r_i}{\partial u_j}(\tilde{\alpha}) \Delta_j + \cdots \\ = g_i(\hat{\alpha}) + \sum_{\substack{j \neq \tau \\ j=1}}^n \frac{\partial g_i}{\partial u_j}(\hat{\alpha}) \Delta_j + \cdots$$

と展開できる. ただし,

$$\hat{\alpha} = (\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_{\tau-1}, L, \tilde{\alpha}_{\tau+1}, \dots, \tilde{\alpha}_n)$$

とする. $g(u) = 0$ は擬局所化可能であるから $\|\Delta\|$ は十分小さく, ゆえに Δ_j の 2 次以上の項を省略すれば,

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial u_j}(\tilde{\alpha}) \Delta_j = g_i(\hat{\alpha}) + \sum_{\substack{j \neq \tau \\ j=1}}^n \frac{\partial g_i}{\partial u_j}(\hat{\alpha}) \Delta_j$$

となり

$$\frac{\partial g_i}{\partial u_\tau}(\tilde{\alpha}) \Delta_\tau + \sum_{\substack{j \neq \tau \\ j=1}}^n \left[\frac{\partial g_i}{\partial u_j}(\tilde{\alpha}) - \frac{\partial g_i}{\partial u_j}(\hat{\alpha}) \right] \Delta_j \\ = g_i(\hat{\alpha})$$

を得る. ここで, $g_i(\hat{\alpha}) = \gamma_I^{m_i} g_{i:m_i}(\hat{\alpha})$ となる. 一方,

多項式を減次しないときは

$$g_i(\tilde{\alpha} + \Delta) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial u_j}(\tilde{\alpha}) \Delta_j + \dots = 0$$

となる。これを g_1, \dots, g_n について考えればよい。■

数値計算により個々の近似解が得られているときは、その値を使い、式(10)で与えられる連立方程式を解くことにより個々の擬局所化による誤差を評価できる。この方法は、個別の近似解を正確に誤差評価するために用いられる。

次に、事前誤差評価を導くが、はじめに次の近似が成り立つ。

命題 6.2 命題 6.1 で与えられる連立方程式の係数行列は、減次を行う多項式に対し、

$$c = (c_1 \epsilon_1, \dots, c_n \epsilon_n)$$

$$\hat{c} = (c_1 \epsilon_1, \dots, c_{\tau-1} \epsilon_{\tau-1}, \gamma_I, c_{\tau+1} \epsilon_{\tau+1}, \dots, c_n \epsilon_n)$$

として

$$b_i \sim f_{i:m_i}(\hat{c})$$

$$p_{ij} \sim \gamma_I \sum_{d=0}^{m_i-1} \frac{\partial f_{i:d}}{\partial x_j}(c) + \sum_{d=0}^{m_i-1} (d - m_i) f_{i:d}(c) \quad (j \in I)$$

$$p_{ij} \sim \gamma_I \sum_{d=0}^{m_i} \frac{\partial f_{i:d}}{\partial x_j}(c) \quad (j \notin I)$$

$$q_{ij} \sim \gamma_I \frac{\partial f_{i:m_i}}{\partial x_j}(\hat{c}) - f_{i:m_i-1}(\hat{c}) \quad (j \in I, j \neq \tau)$$

$$q_{ij} \sim \gamma_I \frac{\partial f_{i:m_i}}{\partial x_j}(\hat{c}) \quad (j \notin I)$$

と表現することもできる。

[証明] 近接根領域を表す $\epsilon_j > 0$ は十分小さく、 $k_j \geq 1$ はある程度大きな数であるから、 $\alpha_j = c_j \epsilon_j$ ($|c_j| \leq 1$) とすれば、式(4)より

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_j &= \alpha_j / \sum_{l \in I} (\alpha_l + \gamma_l) = c_j \epsilon_j / \sum_{l \in I} (c_l \epsilon_l + k_l \epsilon_l) \\ &\sim c_j \epsilon_j / \sum_{l \in I} k_l \epsilon_l = c_j \epsilon_j / \gamma_I \end{aligned}$$

と近似できる。したがって、この近似を用いれば、式(9)より $L \sim 1$ に注意して

$$\begin{aligned} b_i &\sim \gamma_I^{m_i} \sum_{i_1 + \dots + i_n = m_i} a_{i_1 \dots i_n}^{(i)} (c_1 \epsilon_1 / \gamma_I)^{i_1} \dots \\ &\quad (c_{\tau-1} \epsilon_{\tau-1} / \gamma_I)^{i_{\tau-1}} (c_{\tau+1} \epsilon_{\tau+1} / \gamma_I)^{i_{\tau+1}} \dots \\ &\quad (c_n \epsilon_n / \gamma_I)^{i_n} = f_{i:m_i}(\hat{c}) \end{aligned}$$

となる。また、式(11)を微分した

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{i:d}}{\partial u_j}(u) &= \sum_{i_1 + \dots + i_n = d} a_{i_1 \dots i_n}^{(i)} u_1^{i_1} \dots i_j u_j^{i_j-1} \\ &\quad \dots u_n^{i_n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_i}{\partial u_j}(u) &= \sum_{d=0}^{m_i} \left(\gamma_I^d (1 - u_I)^{m_i-d} \frac{\partial g_{i:d}}{\partial u_j}(u) \right. \\ &\quad \left. + (d - m_i) \gamma_I^d (1 - u_I)^{m_i-d-1} g_{i:d}(u) \right) \end{aligned}$$

($j \in I$)

$$\frac{\partial g_i}{\partial u_j}(u) = \sum_{d=0}^{m_i} \left(\gamma_I^d (1 - u_I)^{m_i-d} \frac{\partial g_{i:d}}{\partial u_j}(u) \right)$$

($j \notin I$)

を利用し、同様に計算すればよい。

とくに、 $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \dots = \epsilon$ であれば

$$c = (c_1, \dots, c_n)$$

$$\hat{c} = (c_1, \dots, c_{\tau-1}, K, c_{\tau+1}, \dots, c_n)$$

$$K = \sum_{l \in I} k_l$$

として

$$b_i \sim \epsilon^{m_i} f_{i:m_i}(\hat{c})$$

$$\begin{aligned} p_{ij} &\sim \gamma \sum_{d=0}^{m_i-1} \epsilon^{d-1} \frac{\partial f_{i:d}}{\partial x_j}(c) \\ &\quad + \sum_{d=0}^{m_i-1} (d - m_i) \epsilon^d f_{i:d}(c) \quad (j \in I) \end{aligned}$$

$$p_{ij} \sim \gamma \sum_{d=0}^{m_i} \epsilon^{d-1} \frac{\partial f_{i:d}}{\partial x_j}(c) \quad (j \notin I)$$

$$\begin{aligned} q_{ij} &\sim K \epsilon^{m_i} \frac{\partial f_{i:m_i}}{\partial x_j}(\hat{c}) - \epsilon^{m_i-1} f_{i:m_i-1}(\hat{c}) \\ &\quad (j \in I, j \neq \tau) \end{aligned}$$

$$q_{ij} \sim K \epsilon^{m_i} \frac{\partial f_{i:m_i}}{\partial x_j}(\hat{c}) \quad (j \notin I)$$

を得る。

この近似を用いて、個々の近似解が得られていなくとも、事前に擬局所化による誤差評価を行うことができる。近接根は、原点周りで十分小さい値なので、それを原点 $(0, \dots, 0)$ または $(1/k, \dots, 1/k)$ で近似してもよい。

[評価方法 1]

たとえば、原点 $(0, \dots, 0)$ での近似を考え、 $\epsilon_1 = \dots = \epsilon, \tau = 1, I = \{1\}$ のときは次のようになる。

$$b_i \sim a_{m_i 0 \dots 0}^{(i)} \epsilon^{m_i}$$

$$p_{i1} \sim a_{10 \dots 0}^{(i)} \gamma - a_{0 \dots 0}^{(i)} m_i$$

$$p_{ij} \sim a_{0 \dots 010 \dots 0}^{(i)} \gamma \quad (j \neq 1)$$

$$q_{ij} \sim a_{m_i-1, 0 \dots 010 \dots 0}^{(i)} \gamma \epsilon^{m_i-1} \quad (j \neq 1)$$

さらに、次のように1変数問題に帰着させて誤差を評価することもできる。

命題 6.3 命題 6.1 と同じ条件の下、擬局所化による誤差を $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_n) \in C^m$ とすれば、 Δ_τ は

$$f_j(0, \dots, 0, x_\tau, 0, \dots, 0) = 0$$

を一次分数変換により変換した多項式を減次したときの誤差で評価することができる。

[証明] 記号が繁雑になるので Δ_1 について考えることにする。 n 変数多項式 $f_j(x_1, \dots, x_n)$ は、 $a_i \in C[x_2, \dots, x_n]$ として

$$f_j = x_1^{m_j} + a_1 x_1^{m_j-1} + \dots + a_{m_j-1} x_1 + a_{m_j}$$

という形で表すことができる。ここで

$$a_i = \sum_{d=0}^i \sum_{i_2+\dots+i_n=d} a_{m_j-i, i_2, \dots, i_n}^{(j)} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$$

である。元の連立代数方程式の近接根については

$$x_l = c_l \epsilon_l, \quad |c_l| \leq 1$$

なる関係があり、 $\epsilon_l > 0$ は十分小さな数であることから a_i を

$$a_i = \sum_{d=0}^i \sum_{i_2+\dots+i_n=d} a_{m_j-i, i_2, \dots, i_n}^{(j)} (c_2 \epsilon_2)^{i_2} \dots (c_n \epsilon_n)^{i_n} \sim a_{m_j-i, 0, \dots, 0}^{(j)}$$

により近似する。すると $f_j = 0$ は形式上1変数の方程式となり、すでに文献 8) により擬局所化による誤差を与えている。この誤差で、 Δ_1 を評価する。他の場合も同様である。 ■

この評価式は、命題 6.1, 6.2 と異なり連立方程式を解かなくても擬局所化による誤差評価を得ることができる。とくに、文献 8) に述べた誤差評価から多項式 f_j と近接根領域 ϵ が分かれば、 $f_j = 0$ を解くことにより ϵ を使って擬局所化による事前誤差評価が得られることを意味している。

[実用上の誤差]

したがって、実用上の誤差として

$$\Delta_\tau \sim k_\tau^{r_j-1} \gamma_\tau^{s_j} \left/ \prod_{l=1}^{s_j} \beta_l^{(j)} \right| \quad (12)$$

を用いる。記号の意味については次節を参照されたい。

筆者らは、すでに擬局所化可能性を判断するいくつかの方法を提案しているが^{9)~12)}、ここでは、擬局所化可能性を判断するための簡単な評価を与えておく。擬局所化可能性の定義からすべての近接根 α に対し、 $r_j(\alpha) = 0$ となれば擬局所化が可能である。以

下、 $\tau = 1$ の場合を述べるが他の座標成分の場合も同様である。そこで、 r_j と $g_j(0, \dots, 0) (\neq 0$ とする) の比を考えると

$$p = |g_j(1, u_2, \dots, u_n) / g_j(0, \dots, 0)| = \left| \gamma_1^{m_j} \sum_{i_1+\dots+i_n=m_j} a_{i_1, \dots, i_n}^{(j)} u_2^{i_2} \dots u_n^{i_n} / a_{0, \dots, 0}^{(j)} \right|$$

を得る。ここで $a_{0, \dots, 0}^{(j)}$ は、適当な変数に関する1変数多項式と見たときに、近接根に対応するものとそれ以外の根に対応するものとに分けることができ上式は

$$p = \left| k_1^{m_j} \sum_{i_1+\dots+i_n=m_j} a_{i_1, \dots, i_n}^{(j)} u_2^{i_2} \dots u_n^{i_n} / \left(\prod_{i=1}^{r_j} c_i \prod_{i=1}^{s_j} d_i \right) \right| \epsilon_1^{s_j}$$

となる。これより $u_2 = \dots = u_n = 0$ として次の判定法を得る。

[擬局所化判定法]

$$p_c = |g_j(1, 0, \dots, 0) / g_j(0, \dots, 0)| = \left| \gamma_1^{m_j} a_{m_j, 0, \dots, 0}^{(j)} / a_{0, \dots, 0}^{(j)} \right| = \left| k_1^{m_j} a_{m_j, 0, \dots, 0}^{(j)} / \left(\prod_{i=1}^{r_j} c_i \prod_{i=1}^{s_j} d_i \right) \right| \epsilon_1^{s_j}$$

であるから、もし $s_j = 0$ であれば $p \gg 1$ となり擬局所化はできない。また $s_j \gg 1$ であれば $p \ll 1$ となり擬局所化が可能である。実際には $\gamma_1^{m_j} a_{m_j, 0, \dots, 0}^{(j)} / a_{0, \dots, 0}^{(j)}$ を計算すればよい。

以上は、一次分数変換された連立代数方程式について考えてきたが、これを一次分数変換される前の問題に適用することを考える。このときは、命題 6.1, 6.2, 6.3 の結果に命題 5.1 と同様の考え方を適用することにより、次の命題を得ることができる。

命題 6.4 連立代数方程式 (2) の近接根の1つを $\alpha^{(0)} = (\alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_n^{(0)})$ とし、擬局所化の結果得られた方程式の $\alpha^{(0)}$ に対応する近接根を $\alpha^{(1)} = (\alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_n^{(1)})$ とする。また、 $\alpha^{(0)}$ に対応する式 (8) の根を $\tilde{\alpha}^{(0)} = (\tilde{\alpha}_1^{(0)}, \dots, \tilde{\alpha}_n^{(0)})$ とし、式 (8) を擬局所化した方程式の $\tilde{\alpha}^{(0)}$ に対応する根を $\tilde{\alpha}^{(1)} = (\tilde{\alpha}_1^{(1)}, \dots, \tilde{\alpha}_n^{(1)})$ とする。このとき

$$|\alpha_j^{(0)} - \alpha_j^{(1)}| \sim \gamma_l |\tilde{\alpha}_j^{(0)} - \tilde{\alpha}_j^{(1)}|$$

が成り立つ。

[証明]

$$|\alpha_j^{(0)} - \alpha_j^{(1)}| = \left| \gamma_I \tilde{\alpha}_j^{(0)} / \left(1 - \sum_{i \in I} \tilde{\alpha}_i^{(0)} \right) - \gamma_I \tilde{\alpha}_j^{(1)} / \left(1 - \sum_{i \in I} \tilde{\alpha}_i^{(1)} \right) \right| \\ \sim \gamma_I \left| \tilde{\alpha}_j^{(0)} - \tilde{\alpha}_j^{(1)} \right| \quad \blacksquare$$

この命題中の $|\tilde{\alpha}_j^{(0)} - \tilde{\alpha}_j^{(1)}|$ は、命題 6.1, 6.2, 6.3 によって計算される擬局所化による誤差である。

6.2 擬局所化による根の移動

擬局所化による誤差を評価するうえで、式 (12) に見るように近接根以外の根は重要な役割をしている。そこで、ここでは近接根以外の根の積が擬局所化によりどのように誤差に影響を及ぼすかを調べる。まず始めに、1 変数の場合について考察する。以下では、近接根は適当な座標変換により原点周りへ移動されているものとする。

代数方程式

$$f_0(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

に解と係数の関係を適用すると

$$a_k = (-1)^k T_k(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s)$$

と表せる。ここで T_k は解 $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s$ の基本対称式である。

$\alpha_1, \dots, \alpha_r$ は近接根であり、 β_1, \dots, β_s はそれら近接根から十分離れているので $\prod_{i=1}^s \beta_i$ という項は

$$T_s(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s)$$

の中に表れ、 T_s の他の項は $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ に関するもので $\prod_{i=1}^s \beta_i$ に比べて小さくなる。そこで

$$\left| \prod_{i=1}^s \beta_i \right| \sim |T_s(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s)| = |a_s| \quad (13)$$

と近似すれば、係数 a_s の絶対値を $|\prod_{i=1}^s \beta_i|$ の近似値としてよい。また、近接根以外の根の個数 s は、たとえばスツルムの定理¹⁹⁾から求められる。したがって、元の代数方程式を解かなくても s と $|\prod_{i=1}^s \beta_i|$ の近似を知ることができる。

一方、多項式

$$f_0(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

を一次分数変換

$$x = \gamma u / (1 - u), \quad u = x / (x + \gamma)$$

により変換し、 $r = g(1) = \gamma^n$ に注意して $h(u) = (g(u) - r)(1 - u)$ により多項式の減次を行う。 $h(u)$ を逆変換することにより

$f_1(x)$

$$= (a_1 - n\gamma)x^{n-1} + \left(a_2 - \gamma^2 \sum_{j=1}^{n-1} \binom{j}{1} \right) x^{n-2} \\ + \left(a_3 - \gamma^3 \sum_{j=2}^{n-1} \binom{j}{2} \right) x^{n-3} + \dots \\ + \left(a_{n-1} - \gamma^{n-1} \sum_{j=n-2}^{n-1} \binom{j}{n-2} \right) x \\ + a_n - \gamma^n$$

を得る。 $f_1(x) = 0$ の近接根を $\alpha_i^{(1)}, i = 1, \dots, r$ とし、近接根以外の根を $\beta_i^{(1)}, i = 1, \dots, s-1$ とする。ここで解と係数の関係を適用すると

$$\left| \prod_{i=1}^{s-1} \beta_i^{(1)} \right| \\ \sim \left| T_{s-1}(\alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_r^{(1)}, \beta_1^{(1)}, \dots, \beta_{s-1}^{(1)}) \right| \\ = \left| \left(a_s - \gamma^s \sum_{j=s-1}^{n-1} \binom{j}{s-1} \right) / (a_1 - n\gamma) \right|$$

という近似を得る。ここで分子の γ^s の項は式 (13) より a_s に比べて十分小さいので、この項を省略して

$$\left| \prod_{i=1}^{s-1} \beta_i^{(1)} \right| \sim |a_s / (a_1 - n\gamma)|$$

で近似する。このとき、一度擬局所化をしたときの誤差を $\Delta^{(1)}$ 、もう一度擬局所化をしたときの誤差を $\Delta^{(2)}$ とすれば

$$\Delta^{(1)} \sim \left| D_0 \epsilon^s / \prod_{i=1}^s \beta_i \right| \\ \Delta^{(2)} \sim \left| D_0 \epsilon^{s-1} / \prod_{i=1}^{s-1} \beta_i^{(1)} \right| \\ = \left| D_0 (a_1 - n\gamma) \epsilon^{s-1} / \prod_{i=1}^s \beta_i \right|$$

となる。ここで、 D_0 は ϵ, β_i に関係しない部分をまとめたもの (式 (12) の分子をまとめたもの、あるいはより正確に文献 8) の命題 4.1 で述べている式の係数をまとめたもの) である。とくに、 $a_1 = 0$ であれば

$$\left| \prod_{i=1}^{s-1} \beta_i^{(1)} \right| \sim \frac{1}{n\gamma} \left| \prod_{i=1}^s \beta_i \right|$$

となり擬局所化による誤差評価式 $\Delta^{(2)}$ に、この関係を代入すれば

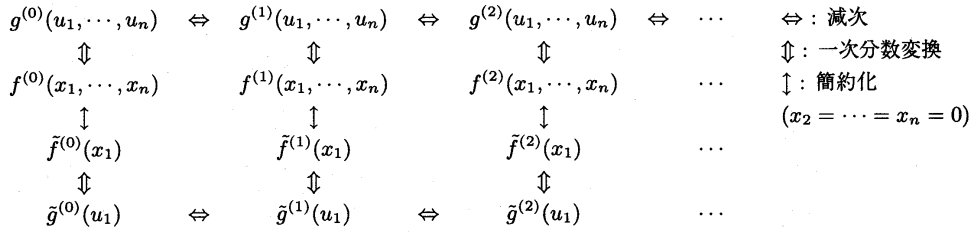


図1 一次分数変換による多項式の変化
Fig. 1 Transformation of polynomial.

$$\Delta^{(2)} \sim \left| nkD_0 \epsilon^s / \prod_{i=1}^s \beta_i \right|$$

となりつねに ϵ^s のオーダーの誤差になることも分かる。

以上をまとめて、次の命題を得る。

命題 6.5 代数方程式

$$f_0(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

において $a_1 = 0$ であれば擬局所化による誤差は

$$\Delta^{(1)} \sim \left| D_0 / \prod_{i=1}^s \beta_i \right| \epsilon^s$$

$$\Delta^{(2)} \sim \left| nkD_0 / \prod_{i=1}^s \beta_i \right| \epsilon^s$$

となりつねに ϵ^s のオーダーの誤差になる。 ■

ところで多変数連立代数方程式の場合には、一次分数変換と擬局所化およびその誤差の関係は図1のように表せる。

一次分数変換された多項式 $g_j(u)$ を一度減次した多項式 $h_j(u)$ の誤差は、命題 6.3 によって評価される。これは、1変数代数方程式の近接根以外の根に影響されることを意味している。ゆえに、多変数の場合にもし

$$f_j = x_i^m + a_1(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) x_i^{m-1} + \dots + a_{m-1}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) x_i + a_m(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = 0$$

において $a_1(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = 0$ となるような i があればそれを利用して多項式を減次すれば先に示した結果から擬局所化による誤差が保証される。

7. 数 値 例

以上述べてきた理論に基づきアルゴリズムの概略を述べておく。

(1) 連立代数方程式 f_1, \dots, f_n を与える。

(2) 数式処理で厳密に一次分数変換を行い、得られた多項式を g_1, \dots, g_n とする。擬局所化を行うときは、適当な多項式 g_i に対し減次を行う。減次を行った多項式 h_j を便宜上再び g_j で表すことにし、次のステップへ行く。

(3) 多項式 g_1, \dots, g_n を必要な精度の浮動小数点で表す。

(4) 数値計算で $g_1 = 0, \dots, g_n = 0$ を解く。

(5) 得られた近似解に対して、逆の一次分数変換を適用して、元の方方程式の近似解を得る。

具体的な計算方法やパラメータの決め方については、文献8)と同様である。以下の例題で使用するパラメータは、すべてこの文献で述べている決め方に従っている。

一次分数変換を利用した、近接根の分離・高精度計算・擬局所化の数値例を以下に示す。

7.1 例 題 1

次の2変数連立代数方程式を考える。

$$f_1 = x^6 - 10^{-17} x^5 + 10^{-33} x^4 - 10^{-50} x^3 - 10^2 x^2 - 10^{-13} x + y^6 + 10^{-17} y^5 + 10^{-33} y^4 + 10^{-50} y^3 - 10^5 y^2 - 10^{-20} y + 10^{-30} = 0$$

$$f_2 = x^6 + 10^{-9} x^5 y - 10^{-17} x^5 - 10^{-26} x^4 y + 10^{-33} x^4 + 10^{-42} x^3 y - 10^{-50} x^3 - 10^{-59} x^2 y + 10^5 x^2 + 10^{-20} x y^5 + 10^{-36} x y^4 + 10^{-53} x y^3 + 10^{-70} x y^2 + 10^{-77} x y + 10^{-15} x - y^6 - y^5 - 10^{-16} y^4 - 10^{-33} y^3 + 10^{-20} y^2 + 10^{-21} y - 10^{-32} = 0$$

この方程式を直接解くと、近接根に関して表3のような結果となった。計算は、複素数の範囲で行っているが、計算結果の虚部は0と見なせるので、実部のみ示す(以下、例題1を通して同様)。各段の上の値が x 座標、下の値が y 座標の値である(以下、例題1を通して同様)。近接根の影響で2段目と3段目が同一

表3 $f_1 = 0, f_2 = 0$ の数値解
Table 3 Numerical solutions of $f_1 = 0, f_2 = 0$.

数値解
0.3112672428080828E-18
0.3112657314679813E-17
0.3112673412266496E-18
-0.3112657398860558E-17
0.3112673412266496E-18
-0.3112657398860558E-17
-0.3212673428075829E-18
-0.3212656914668561E-17

の近似解となっている。そこで、これらの近接根の分離を試みる。この場合、一次分数変換に使用するパラメータの値は、 $\epsilon = 10^{-17}$, $k = 100$ としてよい。

多項式 f_1, f_2 を $\epsilon_1 = \epsilon$, $\gamma_1 = k\epsilon$, $I = \{1\}$ として一次分数変換すると、数値計算部分へ渡す多項式として有効桁数 16 桁の浮動小数点で表現すれば

$$\begin{aligned}
 g_1 = & u^6 + 0.00001u^5v - 106.0u^5 - 10^5u^4v^2 \\
 & - 0.00005u^4v + 415.0u^4 - 10^{-65}u^3v^3 \\
 & + 4.0 \times 10^5u^3v^2 + 0.0001u^3v - 620.0u^3 \\
 & + 10^{-63}u^2v^4 + 3.0 \times 10^{-65}u^2v^3 \\
 & - 6.0 \times 10^5u^2v^2 - 0.0001u^2v + 415.0u^2 \\
 & - 10^{-62}uv^5 - 2.0 \times 10^{-63}uv^4 \\
 & - 3.0 \times 10^{-65}uv^3 + 4.0 \times 10^5uv^2 \\
 & + 0.00005uv - 106.0u + 10^{-60}v^6 \\
 & + 10^{-62}v^5 + 10^{-63}v^4 + 10^{-65}v^3 \\
 & - 10^5v^2 - 0.00001v + 1 \\
 g_2 = & u^6 - 1.000010100102011 \times 10^{-11}u^5v \\
 & - 3.999989799896979u^5 \\
 & + 1.000010100102011 \times 10^{-25}u^4v^2 \\
 & + 5.000050500510055 \times 10^{-11}u^4v \\
 & + 5.999959099586906u^4 \\
 & + 1.000010100102011 \times 10^{-53}u^3v^3 \\
 & - 4.000040400408044 \times 10^{-25}u^3v^2 \\
 & - 1.000010100102011 \times 10^{-10}u^3v \\
 & - 3.999938399377834u^3 \\
 & - 1.000010100102011 \times 10^{-51}u^2v^4 \\
 & - 3.000030300306033 \times 10^{-53}u^2v^3 \\
 & + 6.000060600612066 \times 10^{-25}u^2v^2 \\
 & + 1.000010100102011 \times 10^{-10}u^2v \\
 & + 0.9999585995818558u^2 \\
 & + 1.000010100102011 \times 10^{-50}uv^5 \\
 & + 2.000020200204022 \times 10^{-51}uv^4 \\
 & + 3.000030300306033 \times 10^{-53}uv^3 \\
 & - 4.000040400408044 \times 10^{-25}uv^2 \\
 & - 5.000050500510055 \times 10^{-11}uv \\
 & + 0.00001060010706108132u
 \end{aligned}$$

表4 変換した方程式の数値解と元の空間へ逆変換した値
Table 4 Numerical solutions to $g_1 = 0, g_2 = 0$ and results of original space.

$g_1 = 0, g_2 = 0$ の数値解	元の空間へ逆変換した値
0.3111703856600949E-03	0.3112672428080828E-18
0.3111688747902776E-02	0.3112657314679813E-17
0.3111704840174212E-03	0.3112673412266496E-18
-0.3111688831751174E-02	-0.3112657398860558E-17
-0.3213704870369317E-03	-0.3212672412271495E-18
0.3213689251949443E-02	0.3212656798869308E-17
-0.3213705886826655E-03	-0.3212673428075829E-18
-0.3213689368112464E-02	-0.3212656914668562E-17

$$\begin{aligned}
 & -1.000010100102011 \times 10^{-65}v^6 \\
 & -1.000010100102011 \times 10^{-50}v^5 \\
 & -1.000010100102011 \times 10^{-51}v^4 \\
 & -1.000010100102011 \times 10^{-53}v^3 \\
 & + 1.000010100102011 \times 10^{-25}v^2 \\
 & + 1.000010100102011 \times 10^{-11}v \\
 & - 0.0000001000010100102011
 \end{aligned}$$

を得る。ただし、座標の対応は $(x, y) \rightarrow (u, v)$ である。一次分数変換された連立代数方程式を解いたときの数値解と、得られた値に逆の一次分数変換を適用し、元の空間へ逆変換したときの数値解は表4のようになる。この結果から近接根付近が拡大され、通常の本モトビー法で分離が困難であった近接根が4つの異なる根に分離されていることが分かる。

次に、 g_1, g_2 に擬局所化を適用する。以下では、 g_j を i 回だけ減次を適用した多項式を $g_j^{(i)}$ で表すことにする。すなわち、最初に一次分数変換された多項式は $g_1^{(0)}, g_2^{(0)}$ となる。 $g_1^{(0)}, g_2^{(0)}$ に擬局所化判定法を適用したものを $p_1^{(0)}, p_2^{(0)}$ とすれば

$$p_1^{(0)} = 1.0 \times 10^{-60}, p_2^{(0)} = 1.0 \times 10^{-58}$$

となる。これより、 $g_1^{(0)}, g_2^{(0)}$ ともに減次が可能である。そして、擬局所化したときの事前誤差評価を原点で行えば命題 6.2 より表5のようになる。 $g_1^{(1)}, g_2^{(1)}$ をさらに減次することを考える。擬局所化判定法による評価は

$$p_1^{(1)} = 6.0 \times 10^{-60}, p_2^{(1)} = 6.0 \times 10^{-58}$$

であるから、さらに減次が可能である。擬局所化による事前誤差評価は表6のようになる。

表7に $g_1^{(0)}, g_2^{(0)}$ を一度減次した $g_1^{(1)} = 0, g_2^{(1)} = 0$ を解いたときの計算結果と、さらに一度減次した $g_1^{(2)} = 0, g_2^{(2)} = 0$ を解いたときの計算結果を示す。

事前誤差評価に見るように、計算桁数において1度減次をしたもの、2度減次をしたものいずれも誤差は

表5 擬局所化による事前誤差評価
Table 5 Advance estimates of error.

減次する多項式	事前誤差評価
$g_1^{(0)}$	$\Delta_1 = 1.048 \times 10^{-62}$ $\Delta_2 = 1.111 \times 10^{-56}$
$g_2^{(0)}$	$\Delta_1 = 1.048 \times 10^{-61}$ $\Delta_2 = 1.111 \times 10^{-54}$
$g_1^{(0)}, g_2^{(0)}$	$\Delta_1 = 1.153 \times 10^{-61}$ $\Delta_2 = 1.122 \times 10^{-54}$

表6 擬局所化による事前誤差評価
Table 6 Advance estimates of error.

減次する多項式	事前誤差評価
$g_1^{(1)}, g_2^{(1)}$	$\Delta_1 = 6.996 \times 10^{-61}$ $\Delta_2 = 6.745 \times 10^{-54}$

表7 1度および2度減次した方程式の数値解
Table 7 Numerical solutions to $g_1^{(1)} = 0, g_2^{(1)} = 0$ and $g_1^{(2)} = 0, g_2^{(2)} = 0$.

$g_1^{(1)} = 0, g_2^{(1)} = 0$ の数値解	$g_1^{(2)} = 0, g_2^{(2)} = 0$ の数値解
0.3111703856600949E-03	0.3111703856600949E-03
0.3111688747902776E-02	0.3111688747902776E-02
0.3111704840174213E-03	0.3111704840174213E-03
-0.3111688831751174E-02	-0.3111688831751174E-02
-0.3213704870369317E-03	-0.3213704870369317E-03
0.3213689251949442E-02	0.3213689251949442E-02
-0.3213705886826655E-03	-0.3213705886826655E-03
-0.3213689368112463E-02	-0.3213689368112463E-02

表8 擬局所化による事前誤差評価
Table 8 Advance estimates of error.

減次する多項式	事前誤差評価
$g_1^{(2)}, g_2^{(2)}$	$\Delta_1 = 1.769 \times 10^{-60}$ $\Delta_2 = 1.689 \times 10^{-53}$

混入せずに、表4と一致していることが分かる。

$g_1^{(2)}, g_2^{(2)}$ をさらに減次することを考える。擬局所化判定法による評価は

$$p_1^{(2)} = 1.5 \times 10^{-59}, p_2^{(2)} = 1.5 \times 10^{-57}$$

であるから、さらに減次が可能である。擬局所化による事前誤差評価は表8のようになる。

$g_1^{(3)}, g_2^{(3)}$ をさらに減次することを考える。擬局所化判定法による評価は

$$p_1^{(3)} = 2.0 \times 10^{-59}, p_2^{(3)} = 2.0 \times 10^{-57}$$

であるから、さらに減次が可能である。擬局所化による事前誤差評価は表9のようになる。

表10に3回減次した $g_1^{(3)} = 0, g_2^{(3)} = 0$ を解いたときの計算結果と、4回減次した $g_1^{(4)} = 0, g_2^{(4)} = 0$ を解いたときの計算結果を示す。この場合も事前誤差

表9 擬局所化による事前誤差評価
Table 9 Advance estimates of error.

減次する多項式	事前誤差評価
$g_1^{(3)}, g_2^{(3)}$	$\Delta_1 = 2.386 \times 10^{-60}$ $\Delta_2 = 2.256 \times 10^{-53}$

表10 3回および4回減次した方程式の数値解
Table 10 Numerical solutions to $g_1^{(3)} = 0, g_2^{(3)} = 0$ and $g_1^{(4)} = 0, g_2^{(4)} = 0$.

$g_1^{(3)} = 0, g_2^{(3)} = 0$ の数値解	$g_1^{(4)} = 0, g_2^{(4)} = 0$ の数値解
0.3111703856600949E-03	0.3111703856600949E-03
0.3111688747902776E-02	0.3111688747902776E-02
0.3111704840174212E-03	0.3111704840174212E-03
-0.3111688831751174E-02	-0.3111688831751174E-02
-0.3213704870369317E-03	-0.3213704870369317E-03
0.3213689251949442E-02	0.3213689251949442E-02
-0.3213705886826655E-03	-0.3213705886826655E-03
-0.3213689368112463E-02	-0.3213689368112463E-02

評価に見るように、計算桁数において誤差は混入せずに、表4と一致していることが分かる。

実は、ここまで擬局所化を行うと近接根4個に対して多項式の次数もともに2となりこれ以上擬局所化ができないことになる。これを確認するために、擬局所化判定法を計算すれば、

$$p_1^{(4)} = 1.0 \times 10^2, p_2^{(4)} = 1.0 \times 10^7$$

となり、やはり擬局所化がこれ以上できないことを表している。

このように、一次分数変換を適用した方程式は、根の具体的な値を用いなくとも次数を減少させることができ、しかも事前誤差評価により精度があらかじめ評価できる。さらに、この例題のように(最高次-1)次の係数がほぼ0に近い場合は、命題6.5の後で述べたように擬局所化を行っても誤差がほぼ一定の値であり、しかも無視できるほど小さくなる。

計算時間を比較するために、それぞれの方程式を同じ初期値から計算を開始し、ホモトピーパラメータ t (t について0から1まで追跡) が $|1-t| < 10^{-14}$ になるまでに要した計算時間を表11にまとめておく。また、計算環境はDEC Alpha Station 500/500 (OS: UNIX, 言語: FORTRAN77, CPU: Alpha Chip 21164A, クロック: 500 MHz, メモリ: 512 MB) である(以下、すべての計算時間の比較においてこの条件・環境を用いる)。

ここで、追跡パス数とは、ホモトピー法で追跡するパスの総本数であり、多項式の次数の積である。これより、擬局所化により計算時間が短縮されていることが分かる。

表 11 方程式を解くのに要した計算時間
Table 11 Calculation times of solving equations.

方程式	追跡パス数	計算時間(秒)
$g_1^{(0)}, g_2^{(0)}$	36	0.85302
$g_1^{(1)}, g_2^{(1)}$	25	0.43042
$g_1^{(2)}, g_2^{(2)}$	16	0.34453
$g_1^{(3)}, g_2^{(3)}$	9	0.19813
$g_1^{(4)}, g_2^{(4)}$	4	0.13371

表 12 変換した方程式の数値解と元の空間へ逆変換した値
Table 12 Numerical solutions to $g_1 = 0, g_2 = 0$ and results of original space.

$g_1 = 0, g_2 = 0$ の数値解	元の空間へ逆変換した値
0.1618033988749895E-18	0.1618033988749895E-20
-0.1000000000000000E-05	-0.1000000000000000E-07
-0.6180339887498949E-19	-0.6180339887498949E-21
-0.1000000000000000E-05	-0.1000000000000000E-07
0.7529681929838038E-65	0.7529681929838038E-67
0.6633081482088741E-42	0.6633081482088741E-44

7.2 例題 2

$$f_1 = x^4 - 10^3 x^3 + 10^6 x^2 - 10xy^2 - 10^{-4} y^4$$

$$f_2 = x^8 + 1/25x^6 y^2 + 3/5000x^4 y^4 + 1/250000x^2 y^6 + 10^5 x y^4 - 10^{-14} x y^2 + 10^{-8} y^8 - 10^8 y^4 - y^3$$

この問題は、原点での重複度が6で、原点の近くに2個の近接根を持つ。しかし、直接 $f_1 = 0, f_2 = 0$ を解くと原点へ収束する8個の近似解を得てしまう。そこで、一次分数変換を利用した計算法のところで述べたアルゴリズムを適用する。原点が根になっていることは自明であるから初期パラメータとして、 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ を使い、 $I = \{1\}$ 、 $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.01$ として計算を始める。一般的には、 $f_1 = 0, f_2 = 0$ を精度を多少犠牲にして高速に解いた近似解から先に述べた方法で α_1, α_2 を決めればよい。 $f_1(x, y), f_2(x, y)$ をそれぞれ一次分数変換したものを $g_1(u, v), g_2(u, v)$ とし、 $g_1 = 0, g_2 = 0$ を解くと、すでにこの段階で2つの近接根を得ることができ、さらに6個の原点に収束する近似解も得ることができる。原点付近へ収束した2つの近接根の近似値と原点へ収束した近似解の1つ、および得られた近似解を元の空間へ逆変換したものを表12に示す。逆変換することにより、近接根2つが分離されることと、5.2節で述べたように原点へ収束した近似値がさらに原点へ近づき、原点付近の精度が向上することがこの表から分かる。ここで、各段の上段が u 座標の値で、下段が v 座標の値であり、虚部は0と見なせるので省略する(以下、例題2を通して同様)。

次に、さらに近似解を絞り込むために、新たにパラ

表 13 近似解を絞り込むためパラメータを再決定したときの数値解
Table 13 Numerical solutions to determined new parameters.

$g_1 = 0, g_2 = 0$ の数値解	元の空間へ逆変換した値
0.2186532417229586E-14	0.1618033988749894E-20
-0.1351351351351351E-01	-0.9999999999999997E-08
-0.8351810658782361E-15	-0.6180339887498947E-21
-0.1351351351351351E-01	-0.9999999999999997E-08
0.9462437815390806E-76	0.7096828361543104E-82
-0.6953873100428502E-38	-0.5215404825321376E-44

メータを決定し直す。平均値からの最大のずれは、それぞれの座標に対し $\epsilon_1 = 1.5e-21, \epsilon_2 = 7.5e-9$ で与えられるから、 $k = 100$ として $\gamma_1 = k\epsilon_1, \gamma_2 = k\epsilon_2$ とする。 α_1, α_2 は得られた近似解の平均値を採用するが、この場合はともに0のまま計算を続ける。また、 $\epsilon_1 < \epsilon_2$ であるから $I = \{1\}$ とすると、一次分数変換の形から v 座標の値が大きくなってしまいうため $I = \{2\}$ に切り換える。このときの計算結果の一部と得られた近似解を元の空間へ逆変換したものを表13に示す。

さらに、絞り込みを行おうとして最大のずれを計算すると $\epsilon_1 = 1.5e-21, \epsilon_2 = 7.5e-9$ となり、これ以上絞り込みができず、しかもこの大きさの程度の近接根が存在することを示している。ここで、 $I = \{1\}$ とすると、2つの近接根を取り除いて再び原点の精度を上げることができる。

7.3 例題 3

$$f_1 = x_1^4 - 10x_1^3 - x_1^2 - x_1 + x_{10}^4 - 10x_{10}^3 + x_2^4 - 10x_2^3 + x_3^4 - 10x_3^3 + x_4^4 - 10x_4^3 + x_5^4 - 10x_5^3 + x_6^4 - 10x_6^3 + x_7^4 - 10x_7^3 + x_8^4 - 10x_8^3 + x_9^4 - 10x_9^3 + 1/10000000000$$

$$f_j = x_j^2 - x_1 x_j + x_j^2 - x_j x_{j+1} + x_{j+1}^2 \quad (j = 2, 3)$$

$$f_j = x_j^2 - x_{j-1} x_j + x_j^2 - x_j x_{j+1} - 10x_j + x_{j+1}^2 \quad (j = 4, \dots, 9)$$

$$f_{10} = x_1^2 - x_1 x_{10} + x_{10}^2 - x_{10} x_9 + x_9^2$$

この問題は、原点の近くに8個の近接根を持っているが、通常の計算ではこれら近接根を分離することが難しい。実際、この方程式を直接ホトビー法で解くと、原点の近くへ8本のパスが収束するが、それらを分離することはできなかつた。そこで、そのときの値を利用して、パラメータを $\epsilon_1 = 1.0e-10, k = 100, \alpha_1 = \dots = \alpha_{10} = 0$ として $I = \{1\}$ の型の一次分数変換を適用する。 f_1, \dots, f_{10} を一次分数変換した多項式を、 g_1 のみ後で減次するため右上に添え字を付けた形で、それぞれ $g_1^{(0)}, g_2, \dots, g_{10}$ とする。 $g_1^{(0)} = 0, g_2 = 0, \dots, g_{10} = 0$ を解くと近接根領

表 14 $g_1^{(0)} = 0, \dots, g_{10} = 0$ の数値解の一部
Table 14 Numerical solutions of $g_1^{(0)} = 0, \dots, g_{10} = 0$.

数値解
(0.9900990098029602E-02, -0.1942513262884127E-36)
(0.4950495048965295E-02, -0.8574508947483232E-02)
(0.4950495049014801E-02, -0.8574508947568978E-02)

表 15 元の空間へ逆変換したときの数値解
Table 15 Numerical solutions of original space.

数値解
(0.999999998999996E-10, -0.1981557779464174E-44)
(0.499999999449997E-10, -0.8660254036949489E-10)
(0.499999999499998E-10, -0.8660254037036093E-10)

表 16 $g_1^{(1)} = 0, \dots, g_{10} = 0$ の数値解の一部
Table 16 Numerical solutions of $g_1^{(1)} = 0, \dots, g_{10} = 0$.

数値解
(0.9900990098029609E-02, -0.2546904981689628E-31)
(0.4950495048965299E-02, -0.8574508947483239E-02)
(0.4950495049014804E-02, -0.8574508947568985E-02)

域が拡大され近接根の 8 個が確実に分離されるが, そのうちの 1 つについて u_1, u_2, u_3 座標の値を表 14 に示す. ここで, 上から順に u_1, u_2, u_3 座標の値で, (a, b) は複素数 $a + bi$ を表現している.

得られた値を逆変換して元の問題の近似解を計算すると表 15 のようになる.

$g_1^{(0)}$ についての擬局所化判定法の評価と実用上の誤差は, それぞれ

$$p_1^{(0)} = 1.0 \times 10^{-22}, \Delta = 1.0 \times 10^{-24}$$

となるので, 減次可能と判断できる. $g_1^{(1)} = 0, g_2 = 0, \dots, g_{10} = 0$ を解いたときの u_1, u_2, u_3 座標の値を表 16 に示す. 擬局所化による誤差は, 10^{-24} 程度であるから得られている桁数内には, まだ現れてこない.

$g_1^{(1)}$ についての擬局所化判定法の評価と実用上の誤差は, それぞれ

$$p_1^{(1)} = 1.0 \times 10^{-13}, \Delta = 1.0 \times 10^{-15}$$

となる. $g_1^{(2)} = 0, g_2 = 0, \dots, g_{10} = 0$ を解いたときの u_1, u_2, u_3 座標の値を表 17 に示す. 擬局所化による誤差は, 10^{-15} 程度であり, 表 14 と比べれば実用上の誤差評価が正しいことが確認される.

さらに, $g_1^{(2)}$ についての擬局所化判定法の評価と実用上の誤差は

$$p_1^{(2)} = 1.0 \times 10^{-6}, \Delta = 1.0 \times 10^{-8}$$

となる. この範囲の誤差を許容するのであれば, さら

表 17 $g_1^{(2)} = 0, \dots, g_{10} = 0$ の数値解の一部
Table 17 Numerical solutions of $g_1^{(2)} = 0, \dots, g_{10} = 0$.

数値解
(0.9900990098030613E-02, 0.0000000000000000E + 00)
(0.4950495048965801E-02, -0.8574508947484110E-02)
(0.4950495049015307E-02, -0.8574508947569854E-02)

表 18 方程式を解くのに要した計算時間
Table 18 Calculation times of solving equations.

方程式	追跡パス数	計算時間 (秒)
f_1, \dots, f_{10}	2048	209.27
$g_1^{(0)}, g_2, \dots, g_{10}$	2048	164.24
$g_1^{(1)}, g_2, \dots, g_{10}$	1536	77.188
$g_1^{(2)}, g_2, \dots, g_{10}$	1024	41.218
$g_1^{(3)}, g_2, \dots, g_{10}$	512	32.137

に擬局所化が可能である.

$g_1^{(3)}$ についての擬局所化判定法の評価は, $1.0e2$ であるからこれ以上減次をしても意味がないことが分かる. このように, 減次による誤差を実用上の誤差で評価することができ, 事前に誤差を把握したうえで減次を行うことができる.

計算時間を比較するために, それぞれの方程式を解くのに要した計算時間を表 18 にまとめておく.

擬局所化にともない追跡するパスの本数が減少し, それに従い計算時間が短縮されていることが分かる.

8. おわりに

連立代数方程式の根が重根や近接根を持つ場合には, それらの近似解を数値計算により求めることが難しくなる. そのような場合に, ここで述べたように一次分数変換を適用することが有効であることが分かる. ここで述べた手法の特徴を簡単に列挙すると

- (1) 通常の数値計算で分離困難であるような近接根を分離するための一次分数変換の型を与えた.
- (2) 一次分数変換にともなう精度を命題 5.1 により与えた.
- (3) 近接根や重根の領域を絞り込むことにより, 分離精度・数値精度を向上させることができる.
- (4) 根の具体的な値が分からなくても擬局所化が可能であり, 擬局所化による誤差を命題 6.1~6.4 により与えた.
- (5) 簡単な擬局所化判定法と擬局所化による実用上の誤差を与えた.
- (6) 擬局所化により精度が保証される条件を命題 6.5 により与えた.
- (7) 擬局所化により計算時間の短縮が可能となる.

等があげられる。

とくに、多変数・高次元の問題に対しては、近接根領域が小さいか、近接根以外の根の個数がある程度大きければ、実用上誤差を気にせず擬局所化が行えることになり、計算時間の大幅な短縮が図れることが分かった。

謝辞 論文の全体にわたり、有益な助言をいただいた埼玉大学工学部情報システム工学科三島健稔教授に、謹んで感謝の意を表する。

参考文献

- 1) 小林英恒, 鈴木秀男: 連立代数方程式の解の重複度, 数理解析研究所講究録 831・精度保証付数値計算法とその応用, pp.1-20, 京都大学数理解析研究所 (1993).
- 2) Kobayashi, H., Suzuki, H. and Sakai, Y.: The multiplicity of a solution of a system of algebraic equations II, *Proc. 1994 Winter Workshop on Computer Algebra*, Tokyo, Japan, Hitotumatu, S. (Ed.), pp.11-15, Japan Society for Symbolic and Algebraic Computation (1994).
- 3) Kobayashi, H., Suzuki, H. and Sakai, Y.: Numerical calculation of the multiplicity of a solution to algebraic equations, *Mathematics of Computation*, Vol.67, No.221, pp.257-270 (1998).
- 4) 小林英恒, 鈴木秀男, 酒井明彦: 分数変換による近接根の分離について, 数式処理学会誌, Vol.2, No.2, pp.2-7 (1993).
- 5) 鈴木秀男, 小林英恒: 一次分数変換を利用した1変数代数方程式の近接根の分離, 第51回情報処理学会全国大会論文集, Vol.1, pp.3-4 (1995).
- 6) 小林英恒, 鈴木秀男: 分数変換による近接根の分離, 数理解析研究所講究録 920・数式処理における理論とその応用の研究, pp.202-215, 京都大学数理解析研究所 (1995).
- 7) Kobayashi, H., Suzuki, H. and Sakai, Y.: Separation of close roots by linear fraction transformation, *Proc. ASIAN Symposium on Computer Mathematics*, Beijing, China, He, S. and Hidetsune, K. (Eds.), pp.1-10, Scientists Incorporated (1995).
- 8) 鈴木秀男, 小林英恒: 一次分数変換を利用した近接根の分離方法とその誤差について, 情報処理学会論文誌, Vol.38, No.2, pp.180-191 (1997).
- 9) 鈴木秀男, 小林英恒: 連立代数方程式の擬局所化の過程で生じる誤差についての報告, 数式処理学会誌, Vol.6, No.1, pp.39-40 (1997).
- 10) 鈴木秀男, 小林英恒: 連立代数方程式の擬局所化の過程で生じる誤差について, 第55回情報処

理学会全国大会論文集, Vol.1, pp.72-73 (1997).

- 11) 鈴木秀男, 小林英恒: 連立代数方程式の近接根の分離と擬局所化の可能性について, 数理解析研究所講究録 986・数式処理における理論と応用の研究, pp.136-146, 京都大学数理解析研究所 (1997).
- 12) 鈴木秀男, 小林英恒: 連立代数方程式の減次の可能性について, 数理解析研究所講究録 1038・数式処理における理論と応用の研究, pp.8-16, 京都大学数理解析研究所 (1998).
- 13) 尾崎裕一, 佐々木健昭: 一変数多項式の因子分離法と重根・近接根への応用数理解析研究所講究録 986・数式処理における理論と応用の研究, pp.118-126, 京都大学数理解析研究所 (1997).
- 14) 小島政和: 相補性と不動点, 産業図書 (1981).
- 15) 森 正武, 室田一雄, 杉原正顕: 数値計算の基礎, 岩波書店 (1993).
- 16) Allgower, E.L. and Gerg, K.: *Numerical Continuation Methods*, Springer-Verlag (1990).
- 17) 上野健爾: 代数幾何入門, 岩波書店 (1995).
- 18) 鈴木秀男, 小林英恒: 一次分数変換を利用した連立代数方程式の高精度計算法, 第53回情報処理学会全国大会論文集, Vol.1, pp.63-64 (1996).
- 19) 高木貞治: 代数学講義改定新版, 共立出版 (1965).

(平成 11 年 2 月 10 日受付)

(平成 11 年 9 月 2 日採録)



鈴木 秀男 (正会員)

1961年生。1985年東京電機大学理工学部数学科卒業。1987年同大学大学院理工学研究科数理学専攻修士課程修了。同年雇用促進事業団神奈川技能開発センター電子計算機科勤務。1988年東京職業訓練短期大学校情報処理科勤務。現在職業能力開発総合大学校東京校情報技術科講師。数値計算、数式処理、ハイブリッド計算に関する研究に従事。日本数式処理学会会員。



小林 英恒 (正会員)

1945年生。1967年京大数理学部数学科卒業。1969年同大学大学院理学研究科数学専攻修士課程修了。同年日本大学理工学部助手。現在同大学理工学部教授。理学博士。計算数学、数式処理に関する研究に従事。著書「高校数学によるREDUCE入門」(サイエンティスト社)等多数。日本数学会会員、日本数式処理学会各会員。