非ランバート性拡散反射に対する等高線の発展による陰影からの形状復元

岡谷 貴之† 出口 光一郎†

陰影から形状を復元する問題は 1 階の偏微分方程式として定式化される．解法には古典的な特性方程式による方法のほかに，等高線の発展によって解を計算する方法がある．従来のやり方ではランバート面が仮定されていた．本論文では，ランバート面に限らない一般の拡散反射を考慮する．等高線に基づく形状復元が可能になるために反射率分布図が満たすべき条件を示す．

Shape Reconstruction from Shading by Evolution of Equal Height Contours for Diffuse Non-Lambertian Reflectance

Takayuki Okatani† and Koichiro Deguchi†

The problem of recovering shape from shading is formulated as solving the first order partial differential equation. Besides the classical method of the characteristic equation, a group of methods that computes the solution by tracking its equal hight contour has been proposed. But all of them assumed the Lambertian reflectance. This paper extends the methods to general diffuse reflectance that is not necessarily Lambertian. We show a condition that the reflectance map should satisfy so that the methods can be used.

1. はじめに

陰影からの形状復元問題（shape from shading）は，コンピュータビジョンの分野で長年にわたって研究されてきた問題の 1 つである．物体表面の光の反射特性と周囲環境の照明条件を既知としたとき，問題は，画像の濃淡と形状との関係を表す式を，形状に関する 1 階の偏微分方程式と見て解くことに帰着される．

この偏微分方程式は，初期値を与えて初期値問題として解くことができる．この初期値には，形状に関する知識がない場合でも，与えられた条件の中でとりうる最大の明るさをとる画像の点（特異点と呼ばれる）を利用できる．

Horn は，一般的な条件下での陰影からの形状復元問題を最初に定式化し，さらにその解の計算法を提案した．そこでは上に述べた初期値問題を扱い，それを解くのに古典的な特性方程式による方法を適用した[1]．その方法によれば，特異点を初期値とし，それに端を発する特性曲線と呼ばれる曲線が無数に画像上に構成され，それら 1 本 1 本の特性曲線に沿って形状が計算される．

問題を初期値問題として解く方法は，この Horn の方法のほかにもいくつかある．その 1 つが形状の等高線を画像の濃淡に基づいて発展させる方法である．この方法では，曲線の発展方程式を解くことに帰着される．最初に Bruckstein が，視線と平行な照明下におけるランバート面を扱う方法[2]を示し，視線に対して傾いた照明下でのランバート面を扱える方法が後に提案された[3),4]．

この等高線を利用する方法を，上で述べた Horn による特性方程式による方法と比べたとき，その最大の利点は数値計算の安定性である．空間で 1 本 1 本ばらばらに曲線を伸ばしてゆく特性曲線の方法にくらべ，曲線を発展させて形状を求めるためずっと安定である．また補助関数を導入しその零点集合で曲線を表す方法（Level set 法，等高面の方法などとも呼ばれる[5]）を用いると，曲線の運動の結果現れるトポロジーの変化を簡単に処理でき，また数値計算の安定性がさらに増す．

ただし，従来の等高線による方法では，扱える反射特性はランバート反射のみであった．本論文では，こ

† 東北大学大学院情報科学研究科
Graduate School of Information Sciences, Tohoku University

れを非ランバート性の拡散反射をも扱えるように拡張する．陰影には，形状のほかに，反射特性と照明条件の 2 つの要因が関係する．本論文で議論の対象とするのは，この 2 要因を複合的に表現した反射率分布図であって，この 2 要因を分離しないが，考えやすくするために，この章の以下では平行光の場合を考える（ランバート面の場合は光源が空間中にどのような分布をしていても結局平行光と見なせるから照明条件を考える必要がない．非ランバート面を考えて初めて照明条件を考える必要が生まれる）．

拡散反射は，鏡面反射と並んで反射特性の特徴的な性質を表す概念である．拡散反射というとき，様々な反射特性が含まれる．それらの反射特性は，物体表面の材質や微細構造によって異なる．実際，ランバート反射は拡散反射の 1 つのモデルである．そして，ランバート反射と現実の物体表面の反射特性とは，普通異なっている．

コンピュータビジョンで特に重要な拡散反射のモデルとして，Oren-Nayar のモデル[6),7)] と Wolff のモデル[7)] がある．Oren-Nayar のモデルは，荒い表面における拡散反射特性をモデル化したものであり，一方 Wolff のモデルは，なめらかな表面を対象とし，その拡散反射特性をモデル化したものである．この 2 つのモデルが与える反射特性はかなり異なる．簡単に概要を述べると，同じ物体に同じ照明を与えて陰影を比較したとき，Oren-Nayar のモデルではランバートのモデルよりも濃淡の変化が小さくなり，Wolff のモデルでは濃淡の変化が大きくなる．これはもちろん荒い表面となめらかな表面の示す反射特性の実際を反映したものである（たとえば Oren-Nayar のモデルは，満月が平たい円盤に見えることを説明するとされている）．

これらのモデルには，ランバート反射における反射係数のように，対象によって調節されるパラメータがある．Oren-Nayar のモデルでは，あるパラメータを変化させるとスムーズに単なるランバート反射に収束する．Wolff のモデルでも同様に，パラメータによって特性が変化する．このように，2 つのモデルは無数の反射特性に対応しながら，反射特性の持つある性質をとらえたものであるといえる．

本論文では，等高線による方法が適用可能となるために反射特性と照明条件が満たすべき条件を示す．述べたように反射率分布図に対する条件として示される．その条件は緩やかなものであり，平行光を仮定すれば，たとえば上で述べた Oren-Nayar や Wolff のモデルはこれを満たす．さらにそれ以外の拡散反射もこの条件を満たすと期待される．照明が平行光でない場合でも，対象とする反射特性との組合せにおいて反射率分布図の条件を満たせば，等高線の方法は適用可能となる（ただし，どのような照明条件ならばよいかという問題は，反射特性にも依存するため簡単には答えられない）．

2. 準　　備

2.1　陰影からの形状復元問題

正射影を仮定し，対象物体の表面形状を画像面（座標を (x, y) とする）からの奥行きとして $z(x, y)$ と表す．表面の面の勾配を $(p, q) \equiv (\partial z/\partial x, \partial z/\partial y)$ と表記したとき，相互反射がないとすれば画像の照度 $E(x, y)$ は，

$$E(x, y) = R(p, q) \tag{1}$$

と表せる．$R(p, q)$ は反射率分布図と呼ばれ，反射特性と照明条件の両方に応じて決まる．

陰影からの形状復元の問題とは，形式的に次のように書ける．

問題　画像 $E(x, y)$ は 1 階連続微分可能であるとする．反射率分布図 $R(p, q)$ が与えられたとき，画像照度方程式

$$E(x, y) = R(z_x, z_y) \tag{2}$$

を満たす $z(x, y)$ を求めよ．

2.2　特性方程式

基本的にすべての 1 階の偏微分方程式は，特性方程式と呼ばれる連立の常微分方程式に直して解くことができる．Horn による陰影からの形状復元の最初の手法[1)] はこの考え方に従っていた．その方法についてここで簡単にまとめる．

式 (2) から t をパラメータとする点の軌跡 $(x(t), y(t), p(t), q(t))$ を記述する常微分方程式が導き出される[1),8)]．

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \\ p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_p \\ R_q \\ E_x \\ E_y \end{bmatrix} \tag{3}$$

これが特性方程式である．

この連立常微分方程式の初期値として $xypq$ 空間の 1 点の座標が

$$(x(0), y(0), p(0), q(0)) = (x_0, y_0, p_0, q_0) \tag{4}$$

のように与えられれば，その点に端を発する軌跡が式 (3) に従って $xypq$ 空間上に決まる．その軌跡を特性曲線と呼ぶ．そのうち xy 成分すなわち $(x(t), y(t))$ が画像上に描く曲線は基底特性曲線と呼ばれる．この曲線上で

$$\frac{dz}{dt} = p(t)\frac{dx}{dt} + q(t)\frac{dy}{dt} \tag{5}$$

を積分して $z(x, y)$ を得る．

2.3 初期値と特異点

式 (4) の形の初期値となる 1 点があれば，上の方法によって（その点に端を発する特性曲線上で）形状を計算できる．それには，画像上に勾配 (p, q) の分かる点があればよい．

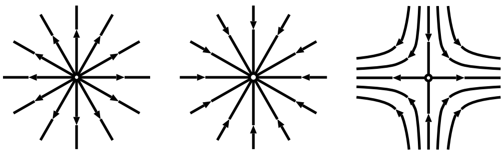
与えられた画像と反射率分布図だけで，ほかに補助的な情報なしに，そのような点を見つけたいと考えるのは自然である．その要求を満たすものとして，反射率分布図の最大値をとる画像の点がある．反射率分布図の最大点を (p_0, q_0)，最大値を R_0 とするとき，この最大値を与える画像の点，つまり $E(x, y) = R_0$ となる (x, y) では，面の向きは (p_0, q_0) と知れるわけである．反射率分布図だけを基にして勾配が分かる点は通常これ以外にはないと思われる．

しかし，そのような画像の点では，実は式 (3) の左辺がすべて 0 になるので，その点から普通に特性曲線を伸ばすことはできない．その点は特性曲線の作る流れの特異点になるのである．Saxberg は，この特異点のまわりの特性曲線の流れ方を明らかにしている[8),9)]．それによると，特異点での形状の種類（凹，凸，鞍のいずれであるか）によって，特異点付近での特性曲線の振舞いが決まる（**図 1**）．これにより，そのような点のうち形状が凸ないし凹である点では，特性曲線は全方位に伸びる（あるいは引き込む．曲線の向きは特性曲線のパラメータの符号の問題にすぎない）．特性曲線が覆う画像の領域においては密に形状を計算できる．

反射率分布図の最大値をとる画像の点を初期値とするのは，次に述べる等高線による方法でも同じである．

2.4 等高線の発展による形状計算の方法

1 階偏微分方程式を常微分方程式の初期値問題に直す方法は，上で述べた特性曲線に基づく方法のほかにもう 1 つある．それは解 $z(x, y)$ の等高線を利用する方法である[2)~5),10)]．最初にこれを提案したのは Bruckstein で，視線と平行な照明とランバート面の場合の陰影からの形状復元問題を解いた[2)]．のちに Osher は陰影からの形状復元に限らない一般の偏微分方程式について定式化を行っている[10)]．Kimmel らはやはりランバート面だが視線に対して傾いた照明を扱っている[3),4)]．ここでは，Bruckstein の方法を要約し，この種の解法の考え方を簡単に述べる．



(a) (b) (c)

図 1 特異点の種類によってそのまわりの特性曲線の振舞いが異なる．(a) 凸な点は湧き出し点に，(b) 凹な点は吸い込み点，(c) 鞍点は 2 本が入り 2 本が出る点になる．

Fig. 1 For each type of singular points, behaviour of the characteristic curves around that point is different. A convex point, a concave point, and a saddle point are a source (a), a sink (b), and a point where two curves flow in and two curves flow out (c), respectively.

Bruckstein は文献 2) で，視線方向と等しい方向 $\hat{\mathbf{l}} = [0, 0, -1]^\top$ の無限遠に点光源がある場合を考えている．この場合，画像の照度 $E(x, y)$ は，画像を適当に正規化すれば面の法線ベクトル $\hat{\mathbf{m}}$ と $\hat{\mathbf{l}}$ の内積によって次のように表せる．

$$E(x, y) = \hat{\mathbf{m}}^\top \cdot \hat{\mathbf{l}} = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \tag{6}$$

形状 $z(x, y)$ の高さ t での等高線を画像面に投影した曲線を考え，これを $C(t)$ と書く．すなわち

$$C(t) = \{(x, y) \,|\, z(x, y) = t\} \tag{7}$$

である．曲線の弧の長さの単調増加関数となるように曲線のパラメータ s を決め，$C(t)$ の各点の位置を $(x(s, t), y(s, t))$ と書く．これは $z(x(s, t), y(s, t)) = t$ を満たす．$z(x(s, t), y(s, t)) = t$ の両辺を s で微分すると

$$px_s + qy_s = 0 \tag{8}$$

を得る．ここで $x_s = \partial x/\partial s, y_s = \partial y/\partial s$ である．

画像上の曲線 $C(t)$ の各点における曲線の単位法線ベクトル $\hat{\mathbf{n}}$ は

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{x_s^2 + y_s^2}} \begin{bmatrix} y_s \\ -x_s \end{bmatrix} \tag{9}$$

と表せる．$C(t)$ が単一閉曲線であれば，s をとる向きを適当に決めることで，ベクトル $\hat{\mathbf{n}}$ がつねに曲線の外側を向くようにできる．正射影であるから，$\hat{\mathbf{n}}$ は同じ点 (x, y) での曲面 $z(x, y)$ の 3 次元法線ベクトル $\mathbf{m}$ を画像面に射影したものに平行である（**図 2** 参照）．画像面上で，法線ベクトル $\hat{\mathbf{n}}$ の方向に δd だけ進んだとする．移動前後での形状の降下分を δt とすると，これは

$$\delta t = \delta d \tan \alpha \tag{10}$$

と表せる．ただし α は面の法線ベクトルと視線方向のベクトルのなす角であり，$\cos \alpha = \hat{\mathbf{m}}^\top \cdot \hat{\mathbf{l}}$ によって与えられる．ここで，式 (6) から $\cos \alpha = 1/\sqrt{1 + p^2 + q^2}$

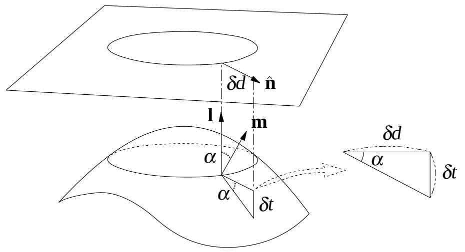


図 2　等高線の法線方向 $\hat{\mathbf{n}}$ と面の法線方向 $\mathbf{m}$ は同一平面上にあり，面の勾配 α は点の明るさから求まる．

Fig. 2　The normal to an equal height contour $\hat{\mathbf{n}}$ and the surface normal $\mathbf{m}$ are on the same plane, and the gradient of the surface α is determined by the image brightness.

であることを使うと

$$\delta d = \delta t \frac{1}{\tan\alpha} = \delta t \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}} = \delta t \frac{E(x,y)}{\sqrt{1-(E(x,y))^2}} \tag{11}$$

とできる．

今，高さ 0 の等高線 $C(0)$ が与えられているとする．式 (11) の関係を等高線の各点で用いると，高さを δt だけ異にする等高線 $C(\delta t)$ を，各点が

$$\begin{bmatrix} x(s,\delta t) \\ y(s,\delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(s,0) \\ y(s,0) \end{bmatrix} + \delta d \cdot \hat{\mathbf{n}} \tag{12}$$

と動いた結果として（その形を）求めることができる．これに式 (9)，(11) を代入して微分で書くと，初期条件として高さ 0 での等高線 $C(0)$ が与えられたときの発展方程式

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \frac{E(x,y)}{\sqrt{1-(E(x,y))^2}} \begin{bmatrix} \dfrac{y_s}{\sqrt{x_s^2+y_s^2}} \\ -\dfrac{x_s}{\sqrt{x_s^2+y_s^2}} \end{bmatrix} \tag{13}$$

として表現できる．この式に従って曲線 $C(t)$ を $C(0)$ を基に次々と発展させて行けば，等高線群が得られ，形状が求まる．

ここでは光源の方向として視線に平行な $\hat{\mathbf{l}} = [0,0,-1]^\top$ を考えたが，傾いた光源を扱う方法[3),5),10)]も示されている．しかし，どの方法においても，反射特性がランバートであることは中心的な役割を果たしている．上では，式 (11) において，面の勾配を表す角 α を画像の明るさで表現し直しているところでこの性質を用いている．これは上の議論で主要なポイントになっているが，ランバート面であればこそ可能になることである．

3. 非ランバート性拡散反射に対する等高線の方法

3.1　非ランバート性拡散反射の扱い

この章では上で述べた等高線を使った解法を，ランバート面にとどまらないより広いクラスの反射率分布図 $R(p,q)$ を扱えるように拡張する．ここでは次のような条件を満足する $R(p,q)$ を扱う．

条件 A　$R(p,q)$ は 1 階連続微分可能であり，ただ 1 つの孤立した最大点 (p_0,q_0) をとり，その (p_0,q_0) を除く任意の (p,q) において

$$(p-p_0)R_p + (q-q_0)R_q \neq 0 \tag{14}$$

である．

一般的な拡散反射では，面の向きの変化に対してなめらかに明るさが変化するから $R(p,q)$ の微分可能性は満たされる．平行光を仮定するとき，拡散反射のみで鏡面反射の成分がなければ，最も明るくなるような面の向きは普通 1 つであるので，最大点 (p_0,q_0) がただ 1 つの孤立点であることも問題ない（これが成り立つのには必ずしも平行光である必要はない）．式 (14) が具体的にどのような制限を与えるかは後で詳しく述べるが，簡単にいうと，pq 空間において (p_0,q_0) を端点とする任意の半直線を考えたとき，その上では $R(p,q)$ の値が単調に減少する，というように表現できる．$R(p,q)$ の形にある種の単調性を仮定するもので，平行光と拡散反射の組合せでは成り立つと考えられる．

3.2　等高線の発展方程式

2.4 節では単純に $z(x,y)$ の等高線を考えたが，ここでは $R(p,q)$ の最大点 (p_0,q_0) が決める方向に形状の高さを表現し直し，その方向での等高線を考える．形状を $(p_0,q_0,-1)$ 方向の高さ関数として表したものを $u(x,y)$ とする（**図 3**）．これは形状にオクルージョンがないとすれば可能で

$$u(x,y) = \frac{z(x,y)-p_0x-q_0y}{\sqrt{1+p_0^2+q_0^2}} + \text{const.} \tag{15}$$

と表せる．右辺の定数は u をどこを基準にしてはかるかによる．

ある高さ t で $u(x,y)$ を切った等高線を画像面に投影する（図 3）．2.4 節同様，得られる画像上の曲線を $C(t)$ と書く．曲線のパラメータ s を弧に沿った長さの単調増加関数にとる．曲線の各点を $(x(s,t),y(s,t))$ と書くと，

$$u(x(s,t),y(s,t)) = t \tag{16}$$

の関係がある．2.4 節と同じように，ある t でのこの

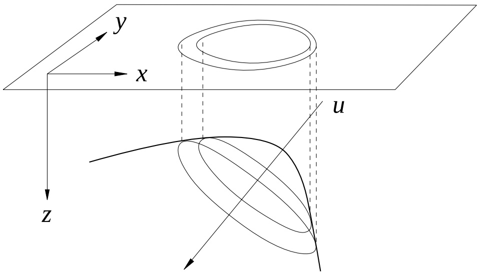


図 3 $u(x,y)$ の等高線を画像面へ投影したもの
Fig. 3 Projections of level contours of $u(x,y)$ onto the image plane.

ような $C(t)$ が与えられたとき，それを基にして δt だけ異なる高さでの等高線の，画像面への投影 $C(t+\delta t)$ を求めることを考える．

今，求めるのは曲線の形であって，新旧の曲線における曲線のパラメータ s の対応は自由とする．このようにすると，曲線 $C(t)$ の各点 s での法線方向に測った新たな曲線 $C(t+\delta t)$ までの移動量 $\delta d(s)$ を求められれば，発展方程式を導ける．

$C(t)$ の s の点がその点での曲線の法線方向 $(y_s, -x_s) = (\partial y/\partial s, -\partial x/\partial s)$ に δd だけ進んで $C(t+\delta t)$ 上に到達したとする．その移動成分は

$$\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \frac{\delta d}{\sqrt{x_s^2 + y_s^2}} \begin{bmatrix} y_s \\ -x_s \end{bmatrix} \tag{17}$$

と書ける．今，仮にこの点での面の勾配 (p,q) が分かっているとする．$(\delta x, \delta y)$ 移動することによる奥行き方向の変化分は $\delta z = p\delta x + q\delta y$ と書ける．これに相当する u の変化分 δu は式 (15) より

$$\delta u = \frac{(p-p_0)\delta x + (q-q_0)\delta y}{\sqrt{1+p_0^2+q_0^2}} \tag{18}$$

である．これが δt となるように δd を決める．この式で $\delta u = \delta t$ とおいて式 (17) の δx，δy を代入すると

$$\frac{\delta d}{\delta t} = \frac{\sqrt{1+p_0^2+q_0^2}\sqrt{x_s^2+y_s^2}}{(p-p_0)y_s - (q-q_0)x_s} \tag{19}$$

を得る．この比は，等高線の微小な高さの変化 δt に対する曲線 C の各点の移動量 δd の比であり，等高線の高さ t を時間と見なすといわば移動の速度に相当する（曲線の運動を扱う分野では，各点の法線方向への速度であるから曲線の法速度などと呼ばれる）．

ここまでをまとめると，p，q が分かっているとすれば等高線の発展を表す微分方程式は形式的に

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{1+p_0^2+q_0^2}}{(p-p_0)y_s - (q-q_0)x_s} \begin{bmatrix} y_s \\ -x_s \end{bmatrix} \tag{20}$$

と書ける．

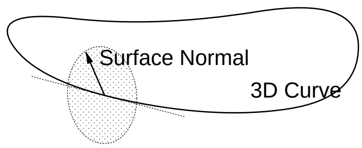


図 4 物体表面上にある曲線の 1 つが 3 次元空間上に与えられたとき，その曲線上の各点における表面の面の向きは，その曲線自体の接線と必ず直交する．
Fig. 4 Given a 3D curve that belongs to a surface, the normal of the surface at each point of the curve must be perpendicular to the tangent to that curve.

3.3 等高線の各点での勾配の決定と反射率分布図の条件

実際には，曲線 $C(t)$ が与えられても勾配 p，q は未知である．そこで次に p，q を決定できるかどうかを考える．

今，曲線 $C(t)$ が与えられているとする．形状の等高線は，高さ t の値を用いて空間曲線として再構成できる．その曲線上の各点での曲面 $z(x,y)$ の面の勾配が決められるかどうかを考える．

まず，曲線が分かっていること自体から面の勾配は自由度を 1 つ分拘束される．これは，**図 4** のように，等高線上の各点で等高線の接線と面の向きが直交するはずだからである．このように，等高線が分かっていることだけで面の勾配は 1 自由度分決まる．

さらに，等高線 $C(t)$ の s の点での画像の明るさ $E(x,y)$ を用いる．画像照度方程式 $E(x(s,t), y(s,t)) = R(p,q)$ は面の勾配 (p,q) の拘束式を与える．これによって勾配の残りの 1 自由度分も拘束される．以上の 2 つの拘束により p と q を決定できる可能性がある．

1 つ目の拘束をあらためて式で表すと次のようになる．式 (15) より $z(x(s,t), y(s,t))$ は次の式を満たす．

$$\frac{z(x,y) - p_0 x - q_0 y}{\sqrt{1+p_0^2+q_0^2}} = t \tag{21}$$

この式の両辺を s で微分すると，等高線による勾配の拘束

$$(p-p_0)x_s + (q-q_0)y_s = 0 \tag{22}$$

を得る．

したがって，$C(t)$ の s の点での勾配 (p,q) は，上式とこの点での画像照度方程式で構成する連立方程式：

$$\begin{cases} (p-p_0)x_s + (q-q_0)y_s = 0 \\ R(p,q) - E(x,y) = 0 \end{cases} \tag{23}$$

の解になる．与えられた x_s，y_s，$E(x,y)$ に対して，p，q が pq 空間で拘束される様子を**図 5** に示す．$R(p,q)$ に関する条件 A の中の 1 階連続微分可能の条件より，解はたいていの場合 2 つ以上存在する．式 (22) を用

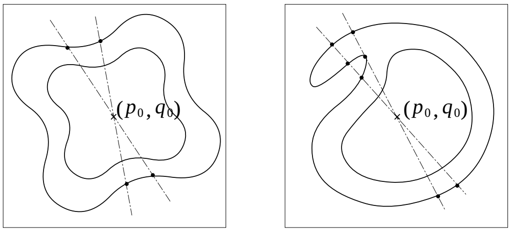


図 5 等高線が一意に発展するためには，勾配空間で (p_0, q_0) を通るどんな直線も，$R(p,q)$ のすべての等高線に対して 2 つ以下の交点しか持ってはならない．

Fig. 5 For the unique evolution of the level contours, it must hold in the gradient space that for any line passing through (p_0, q_0), the number of its intersections with each contour of $R(p,q)$ must be less than three.

いると式 (19) の比（法速度）は

$$v = \pm \frac{\sqrt{1+p_0^2+q_0^2}}{\sqrt{(p-p_0)^2+(q-q_0)^2}} \tag{24}$$

と書ける．

曲線の継続的な発展の過程では，曲線の各点が曲線の内と外のどちら向きに発展するのかは因果的に分かる．したがって，$C(t)$ が次の時刻の $C(t+\delta t)$ へ向かう向き，すなわち式 (19)（あるいは式 (24)）の符号は分かる．$C(t)$ を単一閉曲線であるとすると，曲線に向きをつけることができて，1 点でこの符号を決めると曲線のすべての点で式 (19) の符号は同じになる．この符号は式 (19) の分母 $(p-p_0)y_s-(q-q_0)x_s$ の符号で決まるといえる．その符号はパラメータ s を曲線上どの向きにとるかと，初期曲線からどちらの向きに曲線を発展させるかによって決まる．たとえば符号が正であるとすれば

$$(p-p_0)y_s-(q-q_0)x_s > 0 \tag{25}$$

である．連立方程式 (23) にさらにこの条件を加えれば，(p,q) の候補を絞ることができる．式 (23) の解が 2 つ以下ならば，この符号によって解をただ 1 つに絞リ込むことができ，面の勾配を決められそうである．

このことから，直観的な表現をとれば式 (23) が解を 3 つ以上持たないことが，(p,q) を等高線の各点で一意に定め，ひいては等高線を一意に発展させるための条件ということができる．証明は付録に与えるが，結局，連立方程式 (23) に不等式 (25) を加えたものを満たす解が一意に定まる条件は，次のような条件式になる．

$$(p-p_0)R_p+(q-q_0)R_q \neq 0 \tag{26}$$

これは条件 A の式 (14) にほかならない．$R(p,q)$ が条件 A を満たせば，以上のようにして与えられた初期曲線から等高線を発展させて形状を求められることが分かる．

3.4 等高線の高さを測る方向について

ここでは，反射率分布図の最大点 (p_0, q_0) の方向に形状の高さをとり直し，その等高線に注目した．(p_0, q_0) 方向の等高線を考えなくても発展方程式を導くことはできる．たとえば，視線方向の奥行きをそのまま高さにとって等高線を考えても，その等高線の発展の式は導ける．しかし，その場合に等高線を一意に発展させられるように反射率分布図に課される条件は上で導いたものと異なるものになる．それは，最大点まわりに単調に減少してゆくような拡散反射の性質と整合するものではなくなり，拡散反射の性質がうまく利用できない．同時に最大の明るさを与える画像の点（まわりの形状）を初期値としていつも用いることはできなくなることも問題である．これらの意味で $(p_0, q_0, -1)$ の方向の等高線を考えることは本質的である．

3.5 初期条件と大域的な形状復元

あとは初期曲線となる等高線を得ることができれば，それから等高線を発展させられる．この初期曲線として，特性曲線の方法と同じく反射率分布図の最大値を明るさにとる画像の点が利用できる．Bruckstein と Kimmel は，数値計算を行う際に，この明るさ最大の点のまわりに十分小さい円を描き，それを初期曲線とすることを提案している[2)~4)]．実際にはそれで十分なことが多い．理論上は，凸ないし凹な特異点まわりに特性曲線を引き出して局所形状を計算できるわけであるから，その局所形状を適当な高さで切って等高線を得て，それを初期曲線とすることが可能である．実際の数値計算では，小さい円を初期曲線とすれば十分なのでこのような計算は必要ないが，等高線の発展による局所的な解の存在は，このようにして裏付けられる．

この方法では，凸な点から等高線の発展を始めたとすると，対象形状上にほかに凸な点がなければ，完全にすべての形状を計算できる（凸を凹と置き換えても同じである）．凸な点が 2 つ以上あるときは，一度の計算では形状を部分的にしか計算できない．2 つ以上凸な点がある形状では，凸な点から下っていくときの等高線の変化が不連続になる点があるからである．たとえば 2 つの山がラクダのこぶのようにつながっているようなとき，1 つの山の頂点から等高線を下る方向に見ていくと，途中まで等高線は連続的に変化するが，もう一方の山からの等高線とくっつく点でその変化が不連続になる．そこでは，それ以上の等高線を正しく計算できない．これは，等高線を基礎に問題を解こうとしたことからくる本質的な限界であって，ラン

バートであるか否かは関係ない．そのような形状については，2 つ以上ある凸な点からそれぞれ等高線を発展させ，結果を足し合わせることが必要になる．ランバート面の場合にこのことを行おうとした研究があるが[11)]，その結果は非ランバート面の場合にも応用できよう．

4. 検　　証

提案手法を用いて形状復元のシミュレーションを行い，アルゴリズムの検証を行った．形状として，**図 6** に示すものを用いた．

非ランバート性拡散反射の例として，反射率分布図が次のような指数関数を使って解析的に書かれるものを仮定した．

$$R_E(p,q) = \rho \exp\left\{-\alpha\left((p-p_0)^2+(q-q_0)^2\right)\right\} \tag{27}$$

もちろん条件式 (26) が成り立ち，その特性はランバートではない．反射率分布図は，式 (26) が成り立ちさえすれば，それは解析的に書けなくても構わない．表記の単純さのため，上の式のような簡単なものを仮定したが，それは一般性をそれほど失うものではないと

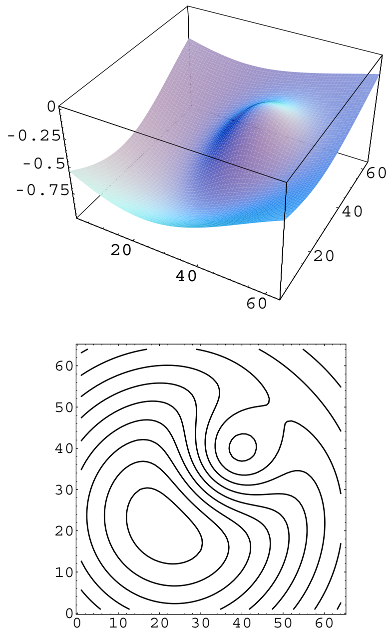


図 6 実験に用いた形状とその等高線
Fig. 6 Surface shape used for experiments of shape reconstruction and its contour map.

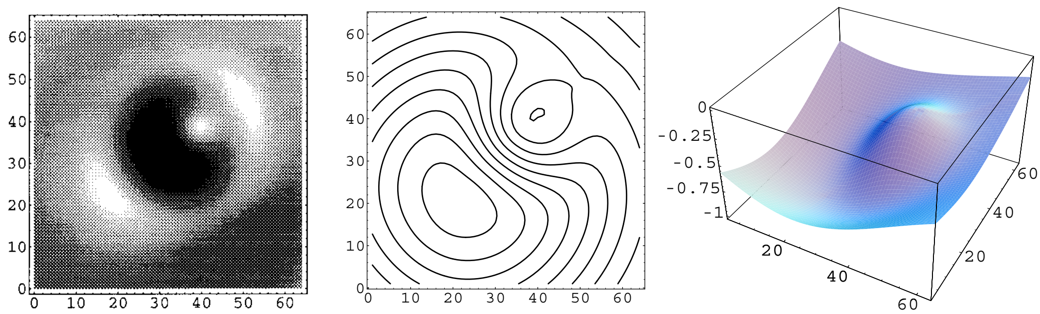


図 7 R_E の場合の合成画像からの形状復元
Fig. 7 Result of shape reconstruction from an image synthesized using R_E.

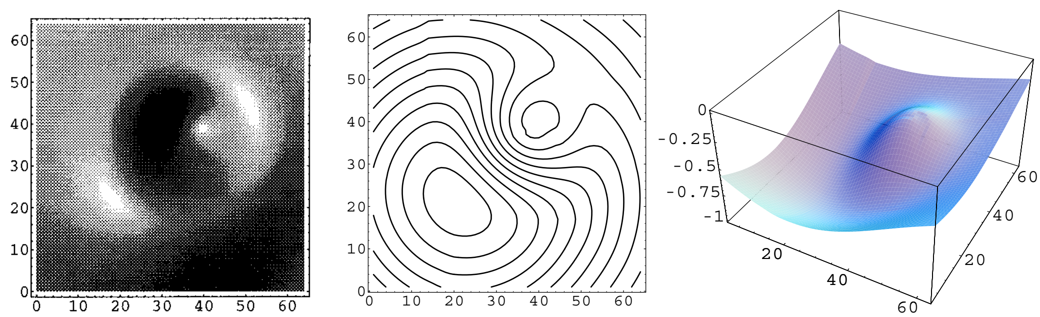


図 8 ランバート面の場合の合成画像からの形状復元
Fig. 8 Result of shape reconstruction from an image synthesized assuming Lambertian reflectance.

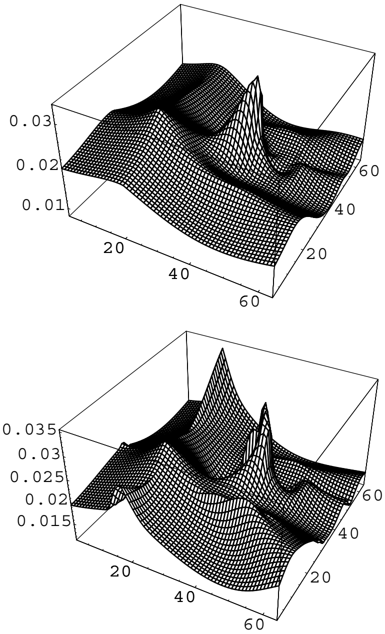


図 9　形状復元の誤差（上：R_E の場合，下：ランバート面の場合）
Fig. 9　Error of shape reconstruction. R_E and Lambertian case.

考えた．また，比較のために次のランバート性の反射特性でも計算を行った．

$$R_L(p,q) = \rho \frac{p_0 p + q_0 q + 1}{\sqrt{1+p_0^2+q_0^2}\sqrt{1+p^2+q^2}} \tag{28}$$

非ランバート性の R_E，ランバート性の R_L それぞれについて，$(p_0, q_0) = (-0.2, 0.2)$ とし，図 6 の形状から画像を合成し，それを基に形状を復元した．結果を**図 7** と**図 8** にそれぞれ示す．いずれも画像の左下に見える最大の明るさをとる画像の点を初期値とした．それぞれの復元誤差を**図 9** に示す．これらの誤差は画像座標の離散化によるとみられ，その大きさは妥当なものであり，正しく復元されることが確かめられた．また，本手法はランバート性であってももちろん正しく復元できることが確かめられた．

5.　特性曲線と等高線の関係

特性曲線の方法では，式 (3) より，$R(p,q)$ が最大点 (p_0, q_0) 以外で $R_p = R_q = 0$ とならなければ，特性曲線は特異点に到達するまでの間（あるいは画像や物体の輪郭の外に出るまでの間）一意に定まる（$E(x,y)$ と $R(p,q)$ が微分できることは必要）．一方，等高線の方法では，等高線が一意に定まっていくためにはそれだけではだめで，上で見たように条件 A が必要になった．以下では 2 つの解法の間の $R(p,q)$ に課せられるこれらの条件の差について考える．

式 (3) より，基底特性曲線（特性曲線の画像上の成分）が進む向き $(\partial x/\partial t, \partial y/\partial t)$ は (R_p, R_q) である．u の等高線の画像上での曲線 $C(t)$ について，各点での曲線の接方向 (x_s, y_s) は，その点での勾配 (p,q) によって決まり，式 (22) よりそれは $(q-q_0, -(p-p_0))$ に平行である．したがって，$C(t)$ の法線方向は $(p-p_0, q-q_0)$ である．条件 A の式 $(p-p_0)R_p + (q-q_0)R_q \neq 0$ は，これら 2 つのベクトル $(p-p_0, q-q_0)$ と (R_p, R_q) が決して直交しないことを意味する．ゆえに基底特性曲線の進む向き (R_p, R_q) は $C(t)$ の法線方向 $(p-p_0, q-q_0)$ と決して直交しない．これは特性曲線が (p_0, q_0) 方向に単調に上昇ないし降下することを意味する．すなわち次の定理がいえる．

定理　$R(p,q)$ が条件 A を満たすとする．このとき特性曲線から得られる解の曲線 $(x(t), y(t), z(t))$ は，(p_0, q_0) が決める方向に対象形状 $z(x,y)$ の上を単調に上昇ないし降下する曲線となる．

このように，等高線の方法で必要になる $R(p,q)$ の条件を，特性曲線の方法に適用したとき特性曲線が上のように拘束されることで，2 つの解法の間の $R(p,q)$ の条件の差が理解される．

6.　ま と め

本論文では非ランバート性の拡散反射に等高線の方法を適用できることを述べた．条件 A を満足する反射率分布図の場合，等高線の方法が使えることを示した．この条件について，平行光の下ではほとんどの拡散反射がこれを満足することを述べた．また，特性曲線による方法との必要になる条件に関する比較を行い，条件 A の下では，特性曲線が与える解は形状の上を単調に上昇ないし降下する曲線になることを述べた．

参 考 文 献

1) Horn, B.K.P.: *Robot Vision*, MIT Press, Cambridge, MA (1986).
2) Bruckstein, A.M.: On shape from shading, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, Vol.44, pp.139–154 (1988).
3) Kimmel, R. and Bruckstein, A.M.: Tracking level sets by level sets: A method for solving the shape from shading problem, *Computer Vision and Image Understanding*, Vol.62, No.2, pp.47–58 (1995).
4) Kimmel, R., Siddiqi, K., Kimia, B.B. and Bruckstein, A.M.: Shape from shading: Level set propagation and viscosity solutions, *International Journal of Computer Vision*, Vol.16,

pp.107–133 (1995).

5) Sethian, J.A.: *Level Set Methods*, Cambridge University Press, Cambridge, UK (1996).

6) Oren, M. and Nayor, S.K.: Generalization of the Lambertian model and implications for machine vision, *International Journal of Computer Vision*, Vol.14, No.3, pp.227–251 (1995).

7) Wolff, L.B., Nayar, S.K. and Oren, M.: Improved Diffuse Reflection Models for Computer Vision, *International Journal of Computer Vision*, Vol.30, No.1, pp.55–71 (1998).

8) Saxberg, B.V.H.: Existence and uniqueness for shape from shading around critical points: theory and an algorithm, *International Journal of Robotics Research*, Vol.11, No.3, pp.202–224 (1992).

9) Bruss, A.R.: The Eikonal Equation: Some Results Applicable to Computer Vision, *Journal of Mathematical Physics*, Vol.23, No.5, pp.890–896 (1982).

10) Osher, S.: A level set formulation for the solution of the Dirichlet problem for Hamilton-Jacobi equations, *SIAM J. Math. Anal.*, Vol.24, No.5, pp.1145–1152 (1993).

11) Kimmel, R. and Bruckstein, A.M.: Global shape from shading, *Computer Vision and Image Understanding*, Vol.62, No.3, pp.360–369 (1995).

付　　録

ここでは，$R(p,q)$ が条件式 (26) を満足すれば，連立方程式 (23) と不等式 (25) をともに満たす (p,q) は一意に定まることを示す．

式 (23)，(25) で，x_s，y_s を α，β と書くことにし，p，q に関する式

$$\begin{cases} \alpha(p-p_0)+\beta(q-q_0)=0, \\ R(p,q)-E=0, \\ \beta(p-p_0)-\alpha(q-q_0)>0 \end{cases} \tag{29}$$

を満たす解を考える．まず 1 番目の式から $(p-p_0, q-q_0) = (\beta t, -\alpha t)$ とおく．最後の不等式に $(p,q) = (p_0+\beta t, q_0-\alpha t)$ を代入すると

$$(\alpha^2+\beta^2)t > 0 \tag{30}$$

を得て，これより $t>0$ である必要があると分かる．$(p,q) = (p_0+\beta t, q_0-\alpha t)$ を $R(p,q)$ に代入し，これを t の関数 $f(t)$ と見る．

$$f(t) \equiv R(p_0+\beta t, q_0-\alpha t) \tag{31}$$

もし，2 番目の式すなわち $f(t)-E=0$ が $t>0$ に解を 1 つしか持たなければ，上の連立方程式の解 (p,q) もただ 1 つしかない．$f(t)$ の t に関する微分は

$$f'(t) = R_p\beta - R_q\alpha \tag{32}$$

である．今，$R(p,q)$ は条件

$$(p-p_0)R_p + (q-q_0)R_q \neq 0 \tag{33}$$

を満たすとする．これに $(p,q) = (p_0+\beta t, q_0-\alpha t)$ を代入すると，

$$R_p\beta t - R_q\alpha t \neq 0 \tag{34}$$

となる．$t>0$ であって

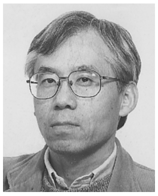
$$R_p\beta - R_q\alpha \neq 0 \tag{35}$$

がいえる．したがって $f'(t) \neq 0$ である．これは $f(t)$ が $t>0$ で単調であることを意味する．よって $f(t)-E=0$ の解 t はたかだか 1 つしかない．$f(0)=R(p_0,q_0)$ であるから $f(t)$ は $t=0$ で最大値をとる．$R(p,q)$ の性質から有限の大きさの t において $f(t)$ は 0 になるはずである．いま，$0<E<R(p_0,q_0)$ であるから，$f(t)-E=0$ の解はあってもたかだか 1 つだけである．以上のようにして示せた．

(平成 11 年 6 月 28 日受付)
(平成 11 年 11 月 4 日採録)

岡谷　貴之（正会員）

1999 年，東京大学大学院博士課程修了（計数工学）．同年より東北大学大学院情報科学研究科助手．画像計測，コンピュータビジョン，特に，画像の陰影と立体形状の関係に興味を持つ．計測自動制御学会会員．



出口光一郎（正会員）

1976 年，東京大学大学院修士課程修了（計数工学）．同年より東京大学工学部助手，講師を経て，1984 年，山形大学工学部情報工学科助教授，1988 年，東京大学工学部計数工学科助教授，1998 年，東北大学情報科学研究科教授，東京大学工学系研究科教授併任，現在に至る．この間，1991 年〜1992 年，米国ワシントン大学客員準教授．コンピュータビジョン，画像計測，並列コンピュータの研究に従事．計測自動制御学会，電子情報通信学会，形の科学会，日本ロボット学会，IEEE 等会員．