3Ｖ－５

離散的流束保存性をもったベクトル場データの補間法と力線可視化

清水　徹，鵜飼正行
愛媛大学工学部情報工学科

１．はじめに

近年，大規模な物理モデルの数値シミュレーションが可能になるのに伴い，そこで得られる大量の出力データから望む物理情報をどの様に抽出するかという問題が生じている．

流体やＭＨＤ（磁気流体）の数値シミュレーションでは流速や磁場などのベクトルデータが扱われる．このようなデータからベクトル場のもつ位相学的な構造を調べる時，流線や磁力線がしばしば用いられる．しかし，一般に力線は発散があると消滅しうるから，力線可視化の際はベクトル場の流束量と発散量の関係に注意すべきである．

一方で，力線は一般的に初期値問題としてそのベクトル場上の追跡により得られる．その際，力線上の全区間に渡ってそのベクトル場を連続的に知る必要があるので，もととなる離散的ベクトルデータは何らかの方法で補間されていなければならない．

我々は，この補間を考える上で，保存形式の差分スキームを用いるほとんどの数値シミュレーションで，（質量やエネルギーが離散的に保存される様に）運動量や磁場が離散的に流束保存性を満たす事を考慮した．

我々の提案する方法は，離散的流束保存性を持ったベクトルデータから連続的な意味で流束保存性を満たすベクトル場を生成する．例えば，非圧縮流や磁場はソレノイダルであり，その力線は完全に発散がない事が保証されるべきである．もしそのベクトルデータが離散的にソレノイダルならば，我々の方法で補間して得られるベクトル場は厳密に連続的にソレノイダルとなる．本講演ではこの補間法を示し，力線追跡問題への適用例を示す．

Visualization of Lines of Force by Interpolation of a Discrete Vector Data with Flux Conservation
Tohru Shimizu ,Masayuki Ugai
Department of Computer Science, Faculty of Engineering, Ehime University

２．離散的流束保存性をもつベクトルデータ

まず流束保存性について説明するため，次のような偏微分方程式を考える．

$$div\ V=Q \qquad (1)$$

Ｖは三次元ベクトル，Ｑは発散である．例えば，一般的な流体シミュレーションではＱは質量（密度）の時間偏微分，Ｖは質量流束（運動量）となる．この時，この式は空間の任意領域への質量流束の和が，その領域内の質量変化と等しい事を表している．つまり，この式は発散量も含めた意味で（連続的）流束保存性を表している．ＭＨＤの場合は磁場がＱ＝０で扱われ，静電場問題ではＱが電荷，Ｖが電場となる．

数値シミュレーションで，このような物理的保存則を考慮しようとする時，式(1)およびＱとＶは離散的に取り扱われる．たとえば，オイラー形式で中心差分法を用いるような（もっとも一般的な）場合，そのデータは次式をみたす．他の差分式の場合については文献[1]で調べられている．

$$\begin{aligned}&\Delta y \Delta z\,(V_{x\,i+1/2,\,j,\,k}-V_{x\,i-1/2,\,j,\,k}) \qquad (2)\\&+\Delta x \Delta z\,(V_{y\,i,\,j+1/2,\,k}-V_{y\,i,\,j-1/2,\,k})\\&+\Delta y \Delta x\,(V_{z\,i,\,j,\,k+1/2}-V_{z\,i,\,j,\,k-1/2})=\\&\Delta x \Delta y \Delta z\, Q_{i,\,j,\,k}\end{aligned}$$

ここで(i, j, k)は差分格子番号，Δx, Δy, Δzは格子サイズである．この式の流束保存性は空間の任意領域でなく差分格子を出入りする流束として，つまり離散的な意味で定義されている．

３．流束補間について

我々は，式(2)を満たすベクトルデータを直接補間せず，それを積分して得られる流束データを補間する．こうすると補間後のベクトル場は式(1)を厳密に満たす．具体的には，まず次式の数値面積分で流束データを生成する．ただし，Ｑは体積積分する．

$$\Phi_{x\,i,\,j,\,k}=\sum_{j'=1}^{j}\sum_{k'=1}^{k} V_{x\,i+1/2,\,j',\,k'}\,\Delta y \Delta z$$

$$R_{\,i,\,j,\,k}=\sum_{i'=1}^{i}\sum_{j'=1}^{j}\sum_{k'=1}^{k} Q_{i',\,j',\,k'}\,\Delta x \Delta y \Delta z \qquad (3)$$

これを次のような多重スプラインで補間する．

$$\Phi_x = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} a_{ijk} B_{im}(x)\, C_{jm}(y)\, D_{km}(z) \qquad (4)$$

ここでB，C，Dはm-1次のBスプライン関数である．こうすると，任意の点のベクトルデータはこれを微分した次式から得られる．

$$V_x(x,y,z) = \frac{\partial^2 \Phi_x}{\partial y \partial z}$$
$$= \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=2}^{J}\sum_{k=2}^{K} (a_{ijk} + a_{ij-1k-1} - a_{ij-1k} - a_{ijk-1}) \cdot B_{im}(x)\, C_{jm-1}(y)\, D_{km-1}(z) / \delta y \delta z \qquad (5)$$

Vy, Vz, Qも同様である．δx, δy, δzは節点間隔である．この様にして得られる連続的ベクトル場は式(1)を満たす[1]．

4．力線追跡問題

この補間法の適用例としてソレノイダル場の力線追跡を行う．二次元のソレノイダル場はよく知られているようにスカラーポテンシャルが存在するから，力線はこのポテンシャルの等高線を描くことで得られる[2]．つまり力線追跡の必要はない．しかし，三次元ではスカラーポテンシャルが存在しないので，この方法が使えない．そこで何らかの力線追跡が必要である．

力線追跡は常微分方程式の初期値問題である．

$$\frac{\partial x(s)}{\partial s} = V_x(x,y,z) \qquad (6)$$

y，z方向も同様である．sは力線に沿った距離変数である．ベクトルVは(x, y, z)に依存しており，離散ベクトルデータに対する何らかの補間関数となる．ここでは次の二方法を考える．一つはもとのベクトルデータを直接線形補間したもので，もう一つは流束補間による式(5)を用いる．

なお，式(6)は，十分小さな差分ステップδsで数値的に解くので，力線は差分法に依らない．

5．結果

ここでは適当なポテンシャル関数からベクトルデータを生成し，それを補間し力線追跡する．ポテンシャル関数は二次元の場合はスカラー，三次元ならベクトル（A）となる．それを適当に差分（V=rotA）してベクトルデータを得る．このデータは式(2)(ただしQ=0)を満たし，つまり離散的にソレノイダルになっている．

図１は二次元の場合である．二つ山のポテンシャル関数を与えたので，その関数の等高線はひょうたん型になっている(図１a)．前節のとおり，力線が等高線で書けるという事は，力線が閉じる事を意味する．

図１bは線形補間の場合である．この場合，δsを十分小さくしても力線は閉じない．これは直接的な線形補間で得られるベクトル場がソレノイダルにならない事を示している．

図１cは上述の流束補間による場合である．力線は閉じている．この事から，補間後のベクトル場が式(1)(Q=0)を満たし，つまり連続的にソレノイダルになっている事がわかる．この方法は三次元ベクトル場へも拡張できる．

参考文献

1)清水　徹，鵜飼正行，離散的ソレノイダル場のスプライン補間による力線の可視化，情報処理学会論文誌，Vol.34, No.8, 1993, in press.
2)M. Ugai and T. Tsuda, J. Plasma Phys., 17, p.337, 1977.