

縮閉線を用いた曲率変化の滑らかな曲線の 構成法とその評価

1V-7

東京電機大学 ○齊藤 剛 豊田工業大学 東 正毅

1 はじめに

自動車ボディーのような工業製品の意匠設計において、デザイナーは、曲面上のハイライトや映像が歪まないことを重要視する。このデザイナーの美的意図を満たすためには、面の法線方向の変化、すなわち、曲率の変化を滑らかにする必要がある。しかし、従来用いられてきた構成法では、曲率変化を考慮し形状を生成することは難しい。

そこで筆者らは、曲面の構成曲線における曲率分布を直接規定することにより、曲率変化が滑らかな曲線を構成し、これにより曲面を構成することを考えた。

デザイナーは、曲線定規や「しない定規 (spline)」で曲線を描くが、一度に描ける範囲を「単位曲線」と呼ぶことにする。この単位曲線は、美的意図により決定され、しかも、曲線内の曲率変化は単調である。単位曲線をつなぎあわせる(これを複合曲線と呼ぶ)ことにより、曲線形状全体を生成する。従って、単位曲線の拘束条件は、曲線の始終点(両端点)、接線方向そして端点での曲率半径となる。

しかし、このような幾何学的拘束条件を満たし、しかも曲率の変化が単調な曲線を構成することは困難である。例えば、スプラインによる曲線構成では、曲線セグメント両端点での曲率条件は満たせるが、セグメント内の曲率変化をも制御することは難しい。実際のデザイナーによる評価実験を行った結果、デザイナーは目視で曲率プロファイル(曲線に沿い、曲率中心を結んだ曲線)を認識でき、曲率が急に変化している箇所や曲率変化の変曲点が2つ以上現われるものは好ましくないと感じる事が確認された。

本法では、目的とする曲線の曲率中心の軌跡である縮閉線 (evolute) を規定し、そこから得られる伸開線

(involute) により単位曲線を得る。縮閉線は、2次有理 Bézier 曲線で表現し、その伸開線を3次有理 Bézier 曲線で近似することにより目的とする曲線を得る。

2 縮閉線による曲線の生成

曲線の曲率中心の軌跡、すなわち曲率プロファイルは、微分幾何における縮閉線である。この縮閉線沿いに糸を張り、それを展開した曲線が伸開線である。

2.1 縮閉線の決定

対象曲線 (\mathbf{R}) の条件を、縮閉線 (\mathbf{r}) の境界条件に置き換えると、図1に示すように、縮閉線の両端位置と接線方向が規定される。図1において、縮閉線の曲線長を s_e とすると、伸開線上の点 $\mathbf{R}(s_e)$ は、定義より、

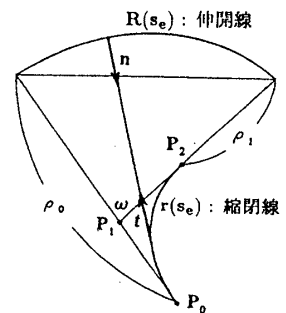


図1. 縮閉線と伸開線

$$\mathbf{R}(s_e) = \mathbf{r}(s_e) + (\rho_0 - s_e)\mathbf{t}(s_e), \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{t}(s_e)$ は、曲線 \mathbf{r} の単位接線ベクトル

と表すことができる。伸開線の曲率半径 ρ は、定義より $\rho - s_e$ であり、縮閉線の長さ l_e は、 $\rho_0 - \rho_1$ となる。

これらの境界条件を満足する縮閉線を、有理2次 Bézier 曲線として決定する。有理2次 Bézier 曲線を

$$\mathbf{r}(t) = \frac{((1-t) + tE)^2(w_0\mathbf{P}_0)}{((1-t) + tE)^2w_0}, \quad (2)$$

ただし、 $E^i(w_0\mathbf{P}_0) = w_i\mathbf{P}_i$

と表す。縮閉線の境界条件より、有理2次 Bézier 曲線の制御点 \mathbf{P}_0 、 \mathbf{P}_2 が定まり、接線方向の交点として \mathbf{P}_1 が定まる。残る自由度は \mathbf{P}_1 におけるウェイト w となり、これを縮閉線長より決定する。この曲線の伸開線として目的とする曲線を生成する。

2.2 3次有理 Bézier 曲線により伸開線の近似

伸開線のままでは、扱いが不便であるので、これを基準線として、有理3次 Bézier 曲線で近似表現する。有理3次 Bézier 曲線を、

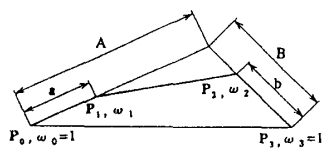


図2: 3次有理 Bézier 曲線

$$r(t) = \frac{((1-t) + tE)^3(w_0P_0)}{((1-t) + tE)^3w_0} \quad (3)$$

とする。両端点での曲率 κ_0, κ_1 が指定されると、図2において、重み w_1, w_2 および制御辺長 a, b の間には、

$$w_1 = \frac{2}{3} \sin(\alpha + \beta) \sqrt{\frac{(A-a)(B-b)^2}{a^4 b^2 \kappa_0^2 \kappa_1}}, \quad (4)$$

$$w_2 = \frac{2}{3} \sin(\alpha + \beta) \sqrt{\frac{(A-a)^2(B-b)}{a^2 b^4 \kappa_0 \kappa_1^2}} \quad (5)$$

の関係が成立する。

ここでは、制御辺長 a, b を未知数として、有理3次 Bézier 曲線の端点での曲率プロットの傾きと、基準線のそれとの二乗和が最小となるようにする。図3に、 $\alpha = 35^\circ, \beta = 45^\circ, \kappa_0 = 0.8, \kappa_1 = 3.0$ とした場合の生成例を示す。

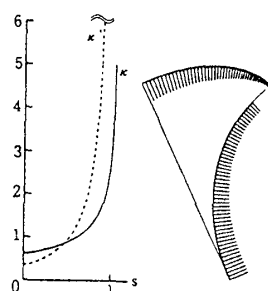


図3: 生成例

3 生成曲線の評価

縮閉線から定めた曲線を評価するために、同一拘束条件を満たし、弾性エネルギーとせん断エネルギーを最小とする曲線を求め、2次式で近似した縮閉線より求めた曲線と比較する。エネルギー最小の曲線は、縮閉線を多边形近似し、各々のエネルギーが最小となるように多边形の形状を変分法により決定することにより求める。モデルを図4に示す。ここで、円弧列

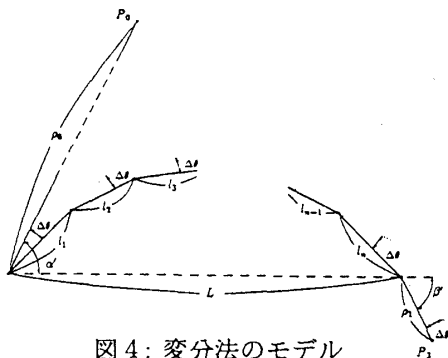


図4: 変分法のモデル

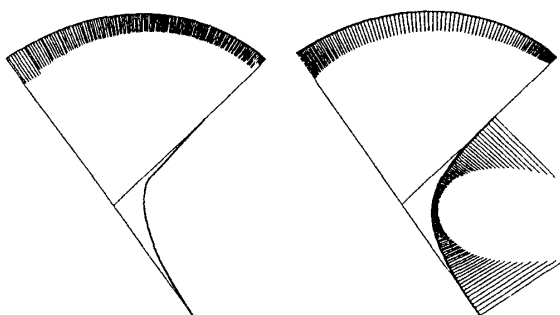
の弾性エネルギー ($E = \int \kappa^2 ds$) とせん断エネルギー ($M = \int \kappa'^2 ds$) は、

$$E = \sum_{i=0}^n \Delta\theta / r_i, \quad (6)$$

$$M = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{r_{i+1}} - \frac{1}{r_i} \right)^2 / (r_i \Delta\theta), \quad (7)$$

ここで、 $r_0 = \rho_0, r_n = \rho_1, r_{i-1} = r_i + l_i$,

である。ここで、 E および M が最小となる l_i を、変分法により求める。図5に、同一の境界条件で、縮閉線により求めた伸開線と上記の方法で求めた弾性エネルギー最少曲線を示す。



(a) 弾性エネルギー最少曲線 (b) 縮閉線による生成

図5: 生成曲線の比較

図5の(b)を、前述の方法により有理3次 Bézier 曲線で近似し、その弾性エネルギーを求めたところ、ほぼ最少であることが確認された。しかし、他の条件で弾性エネルギー最少曲線を求めると、多くの場合、曲率変化が単調とはならなかった。

4 おわりに

本論文では、両端点での接線方向と曲率を拘束条件として曲率変化が単調である曲線を構成する方法を述べた。また、生成曲線の性質を弾性エネルギーの点から考察した。結果として、エネルギーの評価のみでは我々の欲する「曲率変化が単調な曲線」を得えず、筆者らの方法では、ほぼ目的とする曲線が得られることが分った。曲面への応用については、別の機会に報告したい。

参考文献

- 1) 毛利, 東:「縮閉線に基づく曲率変化の滑らかな有理 Bézier 曲線の生成」, 精密工学会春期大会予稿集, 1992.
- 2) 斉藤, 穂坂, 東:「縮閉線に基づく曲率変化の滑らかな曲線・曲面の生成(第2報)」, 精密工学会秋期大会予稿集, 1992.
- 3) 東, 毛利, 川畑:「縮閉線に基づく曲率変化の滑らかな曲線・曲面の生成(第3報)」, 精密工学会秋期大会予稿集, 1992.