Hebbianネットのカオス動作

5N－7

高橋祥兼
ＮＴＴ情報通信網研究所

1. まえがき

脳は、カオス動作を利用して未知パターンを学習していると言われている。即ち、脳は、(1)未知パターンに遭遇したときにカオス状態に遷移し、(2)このこのカオス状態の中で、未知パターンを新規学習パターンとして生成する[3]（図１）。現状のニューラルネットによる学習は、既知パターンの再生のみを対象とする段階に止どまっている。ニューラルネットによる新規パターンの学習を可能とするためには、まず、少なくとも上記(1)の能力をニューラルネットが具備する必要がある。

ニューラルネットにカオス機能をもたせるための拡張等の研究は種々行われている[1]が、文献[2]は、実験により、現状の単純な学習ネット（Hebbianネット、バックプロパゲーションネット）が、カオス動作をすることがあることを示した点で、非常に意義深い。そこで、本稿では、文献[2]の結果を理論的に確認する。具体的には、Hebbianネットのシナプス学習方程式の解軌道に関して、最大Lyapunov指数が正になり、さらに、そのフラクタル次元が非整数になる学習係数が存在することを証明することにより、Hebbianネットのカオス動作を明確にする。

2. Hebbianネット

Hebbのシナプス学習仮説とは、「ニューロンが活性化したときに、そのニューロンに入力を入れたシナプスの結合荷重が強化され増大する」というものである。本稿では、この

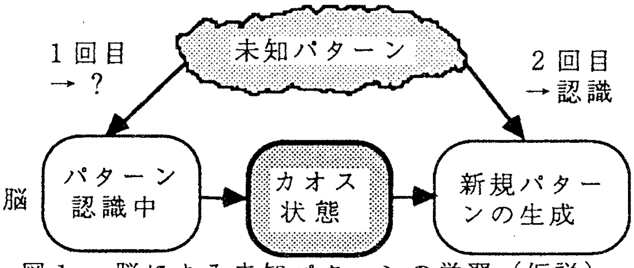

図１．脳による未知パターンの学習（仮説）

Chaotic Behavior in Hebbian Networks
Yoshikane Takahashi
NTT Network Information Systems Laboratories
1-2356 Take, Yokosuka, Kanagawa, 238-03 Japan

学習仮説を実現する最も単純な３ニューロンからなる対称型Hebbianネット（図２）を考察する。

時刻tのときのニューロンjからニューロンiへのシナプス荷重を$w_{ij}(t)(i\neq j; w_{ij}(t)=w_{ji}(t))$とすると、Hebbianネットのシナプス学習方程式は、次のように表現される$(i,j=1,2,3)$[2]。

$$w_{ij}(t+1)=(1-D_w)\,w_{ij}(t)+\eta a_i(t)a_j(t) \qquad (1)$$

ここで、$D_w(0\leq D_w<1)$はシナプス荷重の減衰パラメータを表し、$\eta(>0)$は学習係数を表す。また、$a_i(t)$は、時刻tのときのニューロンiにおける活性度を表し、各時刻tにおいて、$a_i(t)$と$w_{ij}(t)$はニューロン活性度方程式の平衡点における次の関係式を満たしている。

$$a_i(t)=(1-D_a)a_i(t)+E\{\Sigma_k\ a_k(t)w_{ik}(t)+I_i(t)\}(1-a_i(t))$$
$$\text{if }\ \Sigma_k\ a_k(t)w_{ik}(t)+I_i(t)>0 \qquad (2a)$$
$$a_i(t)=(1-D_a)a_i(t)+E\{\Sigma_k\ a_k(t)w_{ik}(t)+I_i(t)\}(1+a_i(t))$$
$$\text{if }\ \Sigma_k\ a_k(t)w_{ik}(t)+I_i(t)\leq 0 \qquad (2b)$$

ここで、$D_a(0\leq D_a<1)$はニューロン活性度の減衰パラメータ、$E(>0)$は活性化パラメータ、$I_i(t)$は外部入力を表す。

式(2)より、$a_i(t)$及び$a_j(t)$は$w_{ij}(t)$のみを用いて表現することができるから、それを式(1)の右辺の第２項に代入することにより（代入した結果得られる多項式をf_{ij}とする）、３個の変数$w_{ij}(t)(ij=12,23,31)$に関する３個の方程式からなる次の非線形差分方程式系を得る。

$$w_{ij}(t+1)=(1-D_w)\,w_{ij}(t)+\eta f_{ij}\{w_{ij}(t)^p\}\quad p>1 \qquad (3)$$

なお、ここで、学習係数ηは、方程式系(3)の非線形度を制御するパラメータの役割を果たす。以下、この方程式系(3)の解軌道$\subset\Re^3$の振る舞いを考察する。

3. Lyapunov指数とフラクタル次元

非線形現象であるカオスの一つの特徴は、解軌道の振る舞いが、初期点に敏感に影響されることであり、Lyapunov指数はその振る舞いを定量的に測る尺度である。即ち、方程式系(3)のLyapunov指数$\lambda_\alpha(\alpha\equiv ij;\alpha=1,2,3)$は、（わずかに）異なる２つの初期点$\in\Re^3$を出発点とす

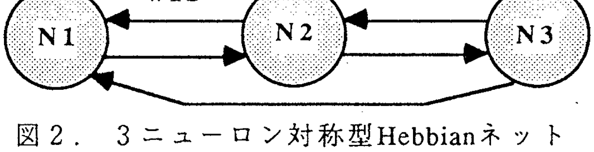

図２．３ニューロン対称型Hebbianネット

る２つの解軌道上の時刻t=∞における２点間の距離の、初期距離に対する伸縮度を表すものであり、次のように定義される。

$$\lambda_\alpha=\lim_{t\to\infty} (1/t)\log\{|L_\alpha(t)|/|L_\alpha(0)|\} \quad (\alpha=1,2,3) \tag{4}$$

ここで、$|L_\alpha(t)|$及び$|L_\alpha(0)|$は、各々、２点間の時刻t及び時刻0におけるα軸方向の距離を表す。λ_αが正（負）であるならば、２点はα軸に沿って指数関数的に離れている（近い）ことを意味する。従って、少なくとも一つのLyapunov指数が正であれば、方程式系(3)はカオス動作をする。なお、一般的に差分方程式系または常微分方程式系が与えられた場合、そのLyapunov指数を与える公式は、未だ発見されていない[4]。

次に、カオスのもう一つの特徴は、解軌道のアトラクタがフラクタル図形となることである。通常のアトラクタはユークリッド図形であり、その次元は整数であるため、アトラクタのフラクタル次元（非整数値をとりうるユークリッド次元の拡張）は、アトラクタのカオス性を測る一つの定量的尺度を与える。さて、ここで、式(3)のアトラクタのフラクタル次元D（Lyapunov次元またはKaplan-Yorke次元: 正確には、フラクタル次元の下限）は、Lyapunov指数λ_α($\lambda_1\geq\lambda_2\geq\lambda_3$と改めて並べ変えておく)を用いて、次のように推定できる[4]。

$$D=k-(\lambda_1+\cdots+\lambda_k)/\lambda_k \tag{5}$$

但し、ここで、kは、$(\lambda_1+\cdots+\lambda_k)$が負になるような番号のうちで最小な番号を表す。

4．Hebbianネットのカオス動作

従来、方程式系(3)の学習係数ηは、通常、η=1/N（N≡ニューロン数=3）と設定され、その場合、解軌道は一点に収束する[2]。しかし、学習係数ηの値によっては、方程式系(3)の解軌道がカオス動作をすることがあることを、次の定理で証明する。

> [定理]
> 次の条件を満たす学習係数ηが存在する。
> (1) 最大Lyapunov指数が正となる。
> (2) フラクタル次元Dが非整数となる。

[略証]

(1)　最大Lyapunov指数が正となることを示すには、式(4)より、次の式を示せば十分である。

$$\exists\alpha_0,\ \exists\varepsilon>0,\ \exists t_0,\ \forall t\geq t_0: |L_{\alpha 0}(t)|>(1+\varepsilon)|L_{\alpha 0}(0)| \tag{6a}$$

$$L_\alpha(t)\equiv w^A{}_\alpha(t)-w^B{}_\alpha(t) \tag{6b}$$

ここで、A,Bは、異なる初期点から出発する２つの解軌道を表す。

まず、式(3)より、次の式を得る。

$$w_{ij}(t)=w_{ij}(0)-D_w\{w_{ij}(t-1)+\cdots+w_{ij}(0)\} +\eta[f_{ij}\{w_{ij}(t-1)^P\}+\cdots+f_{ij}\{w_{ij}(0)^P\}] \text{ for } \forall t \tag{7}$$

そこで、式(7)より次の式を得る。

$$L_\alpha(t)=L_\alpha(0)-D_w\{L_\alpha(t-1)+\cdots+L_\alpha(0)\} +\eta[L_\alpha(t-1)F_{t-1}\{w^A{}_\alpha(t),w^B{}_\alpha(t)\}+\cdots +L_\alpha(0)F_0\{w^A{}_\alpha(0),w^B{}_\alpha(0)\}] \text{ for } \forall t \tag{8}$$

ここで、$F_{t-1},\cdots,F_0$は多項式（正確には、αに依存）を表す。従って、式(8)においてどれか一つα_0を固定し、十分大きなηとt_0、及び十分小さなεをとれば、式(6)が成立する。

(2) 最大Lyapunov指数をλ_1とする。このとき、次の２つのケースがあり得る。

$$[\text{ケース}1]\ \lambda_1+\lambda_2<0 \tag{9}$$

$$[\text{ケース}2]\ \lambda_1+\lambda_2\geq0 \text{ and } \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3<0 \tag{10}$$

まず、ケース１の場合は、式(5)においてk=2とすると、次の式を得る。

$$D=1-(\lambda_1/\lambda_2) \tag{11}$$

さらに、式(11)において、$\lambda_1>0$かつ$\lambda_2<0$であり、項(1)において式(6)を満たし、$\lambda_1/\lambda_2\neq-1,-2$となるように学習係数ηを選ぶことができるため、Dを非整数とすることができる。

次に、ケース２の場合は、式(5)においてk=3とすると、次の式を得る。

$$D=2-(\lambda_1+\lambda_2)/\lambda_3 \tag{12}$$

さらに、式(12)において、$\lambda_1+\lambda_2\geq0$かつ$\lambda_3<0$であり、項(1)において式(6)を満たし、$(\lambda_1+\lambda_2)/\lambda_3\neq0,-1$となるように学習係数ηを選ぶことができるため、Dを非整数とすることができる。　[証終]

5．むすび

最も単純な学習ニューラルネットであるHebbianネットがカオス動作をすることがあることを理論的に明らかにした。今後の課題は、Lyapunov指数λ_α及びフラクタル次元Dの値を正確に求めて、カオス動作の詳細な性質を明らかにすること、さらに、それに基づいて、各種の未知パターンに対して適切なカオス状態に遷移する学習ニューラルネットを構成することである。

文　献

[1] 合原: "カオスニューラルネットワーク", 信学技報, NLP88-71 (1989).

[2] Mass, Verschure and Molenaar: "A note on chaotic behavior in simple neural networks", Neural Networks (1990).

[3] Skarda and Freeman: "How brains make chaos in order to make sense of the world", Behavioral and Brain Sciences (1987).

[4] 高安: "フラクタル", 朝倉書店 (1986).