3T－7

指定母点に対するボロノイ領域の高能率算出アルゴリズム

相良 毅[†] 大沢 裕[‡] 坂内 正夫[†]

[†]東京大学生産技術研究所 [‡]埼玉大学工学部

1 はじめに

空間中の点群に対し、ある点を最近点とする領域をボロノイ領域と呼び、その点を領域の母点という。また、空間をボロノイ領域によって分けることをボロノイ分割という。ボロノイ分割は隣接関係の自然な定義である [1]。

ボロノイ分割を効率良く行なう算法については、従来様々な提案がなされている [2] が、ある点のボロノイ領域だけを求める算法についての提案は少ない。これは、一つ一つのボロノイ領域を求めてボロノイ線図を作成するより、全ての点に対するボロノイ線図を直接求める方が、計算量が少なくてすむためである [1]。

しかし多数のデータのうち、少数のデータの隣接データを検索するような要求が多い汎用データベースで利用するには、常に最新のボロノイ線図を記憶しておかなくてはならない算法はメモリ効率の点から実用的ではない。そこで、汎用多次元データ構造上で、指定された母点に対応するボロノイ領域だけを平均 $O(\log^2 N)$ の計算手間で求める算法を提案する。

2 提案する算法

ボロノイ領域を効率良く求めるには、隣接点となりうる点の存在範囲をなるべく限定して、検査領域を小さくすれば良い。提案する算法では、まずボロノイ領域の候補として多角形を準備する。次にこの多角形を手がかりに、隣接点の必要条件から検索範囲を決定する。この範囲内の点で十分条件を満たすものを選び、隣接点として採用する。

母点 P とそれ以外の点 Q があるとき、Q が P の隣接点である必要条件を考える。線分 PQ の垂直二等分線 m が多角形と交わらない時、隣接点の定義から Q は P の隣接点ではない。よって多角形の各頂点と母点を結ぶ線分を作り、いずれかの線分と m が交差すれば Q は隣接点である必要条件を満たす (図 1)。交差

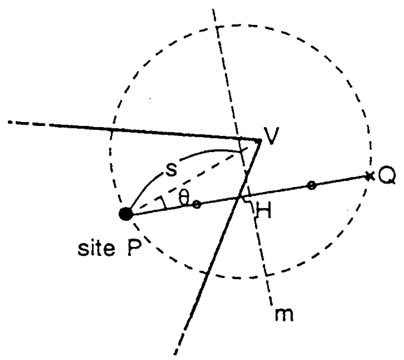

図 1: 隣接点の必要条件

の判定は次のように行なう。多角形の頂点の一つを V とし、線分 PV と m の交点を H とする。PH 間の距離を s とおけば、s は次の式で表される。

$$s = \frac{|PQ|}{2 \cdot \cos\theta} \tag{1}$$

ここでθは線分 PQ と線分 PV のなす角である。この s の値が PV の長さより小さければ線分 PV と m は交差する。

次に Q が P の隣接点である十分条件を考える。

性質 P 以外の全ての点の中で、Q が式 (1) によってあたえられる s の値を最小にするな

A Fast Algorithm Generating a Voronoi Polygon from a Specified Site

[†]Takeshi SAGARA, Masao SAKAUCHI
Institute of Industrial Science, University of Tokyo
7-22-1 Roppongi, Minato, Tokyo 106, Japan
[‡]Yutaka OHSAWA
Information and Computer Sciences, Saitama University
255 Simo-okubo, Urawa, Saitama 338, Japan

らばQはPの隣接点である。

証明　Qと同じsの値を与える点の軌跡は、Hを中心としP及びQを通る円である。式(1)及び図1から、Qより小さいsを与える点はこの円の内部になければならない。Qがsの値を最小にするならば、この円の内部には他の点は存在しない。これはQがPの隣接点であるための十分条件である[3]。

3　アルゴリズム

隣接点が満たす必要条件、十分条件を利用して、次のアルゴリズムによって一つの隣接点を求める。このアルゴリズムは、ノード管理を外接長方形によって行なう木構造をもったデータ構造であるBD木、k-d木、r-木などで利用できる。

(1) $s_0 = |PV|$とおく。k:=0。
(2) Pが管理されている葉ノードまで降りる。
(3) 葉ノード中でsを最小とする点を見つけ、s_kより小さければs_{k+1}とする。k:=k+1
(4) $s_{k+1} < s_k$となるs_{k+1}を与える点の存在する円領域を作り、その円領域の外接長方形をrとする。親ノードに戻る。
(5) rとカレントノードの子ノードの外接長方形との交差判定を行ない、交差がある場合はその子ノードに降りる。葉ノードに到達するまで繰り返し、(3)に移る。
(6) もし子ノードにrと交差する未処理のノードが無ければ、親ノードに戻る。(5)に移る。もし根ノードであればs_kを与えた点を返して終了。

(2)の処理は、Pが管理されているノードにはPに比較的近い点があるので、初めにこのノードをチェックすることで検索範囲を小さくすることが出来るからである。

多角形の全ての頂点についてこの隣接点を求めるアルゴリズムを利用すれば、全ての隣接点が求まるので、ボロノイ領域を求めることができる。

4　計算量に関する考察

提案方式では木構造を利用するため、(検査する点の個数) × $\log N$の計算量を必要とする。(検査する点の個数)は、隣接点を求めるアルゴリズムで木構造をたどるため、$O(\log N)$である。これを確かめるため、次の実験を行なった。

まず、空間中にN個の点を乱数で発生させ、一つの隣接点を求めるために検査する点の個数を数える操作を計5000個の点について行ない平均と分散を求めた。次にNを変化させてNと検査する点の個数の関係を調べた(図2)。グラフは横軸に母点の数を対数軸で、縦

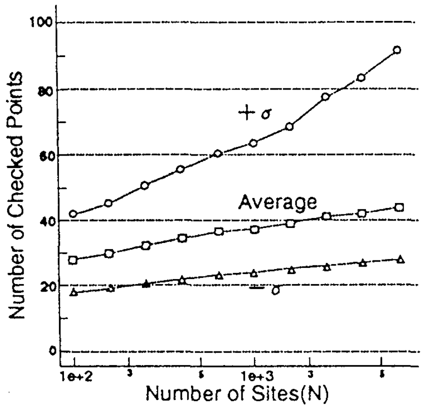

図 2: 実験結果

軸に検査した点の個数を線形軸で表示しており、ほぼ直線的に増加しており$O(\log N)$であると言える。これより、提案算法を用いて一つの指定母点に対するボロノイ領域を求める計算量は、平均$O(\log^2 N)$であると考えられる。

5　おわりに

空間中にN個の点が存在する時に、指定した点のボロノイ領域だけを平均$O(\log^2 N)$で求める算法を提案した。この算法は、多数のデータ中比較的少ないデータのボロノイ領域や隣接データを求めたい場合などに有効である。

文 献

[1] F.P.Preparata and M.I.Shamos,"Computational Geometry",Springer-Verlog,1985

[2] 伊理編,「地理的情報の処理に関する基本アルゴリズム」,日本OR学会,1983

[3] Guibas.L and Stolfi.I,"Primitives for the manipulation of general subdivisions and computationals of Voronoi diagrams",ACM TOG,vol.4 ,No.2,Apl.1985,pp104-106