一次元セルオートマトンの特性表現[注1]

2T－8

穴田一[1]，今村泰正[2]，香山喜彦[3]
[1]神戸大学理学部，[2]神戸大学自然，[3]梅花女子大学

1．はじめに

一次元のセル構造オートマトンは，Wolframによって以下のように４つのクラスに分類されている[1]：
Ⅰ：一様な状態に移行するもの
Ⅱ：一定のパターンを繰り返すもの
Ⅲ：パターンは常に変化し，カオス的な振舞いをするもの
Ⅳ：カオス的であったり，一定のパターンが続いたり，複雑な振舞いをするもの
基本的な２状態３近傍ルールの場合，独立な８８個のルールは，統計的な状態指数をシミュレーションによっⅡて求めることによりある程度分類されている[2]．しかし，複雑な振舞いをするクラスⅣルールと，カオス的なクラスⅢルールとの区別は，今のところ不充分である．そこで今回の発表では，オートマトンルールの特性表現を定義して，クラスⅣルールと呼ばれている#54と#110が，他のクラスⅢルールとどのように異なる性質を持つのかを明らかにしたい．

2．特性表現とクラス分類への応用

状態値として０または１の値を取るｉ番目のセルの状態変数をx_iとすると，１次元Ｎセルの状態配位は$X=\{x_1,x_2,\ldots,x_N\}$で与えられる．全ての状態配位の集合を配位空間と呼び，$\{X\}_N$で表す．セルオートマトンのルール関数は，各セルの次の時間ステップの状態を決定するが，３近傍ルールの場合，対象セルとその両隣りのセルの関数として表現される：

$$x_i^{(t+1)} = f\left(x_i^{(t)}\right) = f\left(x_{i-1}^{(t)}, x_i^{(t)}, x_{i+1}^{(t)}\right)$$

この関数を用いて，配位空間$\{X\}_N$からそれ自身への写象$F:\{X\}_N \to \{X\}_N$を以下のように定義する：

$$F(X) = f((x_1, x_2, \ldots, x_N)) = (f(x_1), f(x_1), \ldots, f(x_N))$$

但し，周期的境界条件を仮定する．
時間発展は，以上の写象の合成として与えられる．最初の３近傍ルール関数を１次のルール関数と呼び，$f^{(1)}$と書けば，ｔ次のルール関数は

$$f^{(t)}_{(x_i)} = f^{(1)}\left(f^{(1)}\left(\ldots f^{(1)}(x_i)\ \ldots\right)\right) = f^{(t)}(x_{i-t},\ldots,x_i,\ldots,x_{i+t})$$

で与えられる．これにより，配位空間上のｔ次の写象$F^{(t)}:\{X\}_N \to \{X\}_N$も同様に定義される．いま，配位空間$\{X\}_N$のｔ次の写象$F^{(t)}$による象$F^{(t)}(\{X\}_N)$について，以下の関係は明らかである：

$$F^{(1)}(\{X\}_N) \supset F^{(2)}(\{X\}_N) \supset \ldots \supset F^{(t)}(\{X\}_N) \supset \ldots$$

クラス分類は，充分時間を経過した後の各ルールに対する$F^{(t)}(\{X\}_N)$の類似性による分類であると解釈しなおすことができる．これを表現するために，我々は象$F^{(t)}(\{X\}_N)$そのものではなく，これに作用するルール関数の実効的な表現を求めることを試みた．これは，$F^{(t)}(\{X\}_N)$の類似性を，それに作用する関数の類似性として表現できると考えたからである．

$F^{(t)}(\{X\}_N)$に含まれる各状態配位$X^{(t)}$は，$F^{(t)}:\{X\}_N \to \{X\}_N$が多対一写象であるからそれぞれの多重度が存在する．それを$n(X^{(t)})$と書き，各$X^{(t)}$内に３セル状態 (0,0,0)...(1,1,1) (0..7) が出現する数を$m_0(x^{(t)})\ldots m_7(x^{(t)})$とすれば，

$$\sum_{X^{(t)} \in f_r^{(t)}(\{X\}_N)} n\left(X^{(t)}\right) = 2^N, \quad \sum_{i=0}^{7} m_i\left(X^{(t)}\right) = N$$

が成り立つ．Wolframのルール番号rの関数は$f_r(0,0,0)\ldots f_r(1,1,1)$ $(f_r(0)\ldots f_r(7))$の値で定義され，t+1次で

[注1] Chracteristic Representation of One-dimensional Cellular Automata
Hajime ANADA, Yasumasa IMAMURA, Yoshihiko KAYAMA[1]
KOBE University, [1]BAIKA Women's College

の状態配位 X の重み(weight)の平均値は，多重度 $n(X^{(i)})$ も考慮して，

$$\langle w(X)\rangle^{(t+1)} = \frac{1}{2^N} \sum_{X^{(i)} \in f_r^{(i)}(\{X\}_N)} \sum_{i=0}^{7} n(X^{(i)}) m_i(X^{(i)}) f_r(i)$$

で与えられる．ルール関数 f_r に対する特性関数 $\tilde{f}_r^{(i)}$ は，この平均値を不変にするよう以下のように定義する：

$$\langle w(X)\rangle^{(t+1)} = \frac{N}{8} \sum_{i=0}^{7} \tilde{f}_r^{(t)}(i)$$

この式だけでは一般に $\tilde{f}_r^{(t)}$ は定まらないが，いま，３セルの配位状態の出現割合

$$R(i) = \frac{8}{2^N \cdot N} \sum_{X^{(i)} \in f_r^{(i)}(\{X\}_N)} n(X^{(i)}) m_i(X^{(i)})$$

を規格化するように f_r を補正して，　$\tilde{f}_r^{(t)}$を定義する：

$$\tilde{f}_r^{(t)}(i) = \begin{cases} f_r(i) & \text{for } R(i) \geq 1 \\ R(i) f_r(i) + \dfrac{\sum_{R(j)\geq 1} (R(j)-1) f_r(j)}{\sum_{R(j)\geq 1} (R(j)-1)} (1 - R(i)) & \text{for } R(i) < 1 \end{cases}$$

これにより，実効的なルール関数の表現を得ることができる．この関数の値は，一般に０から１の間の実数値をとり，特定のオートマトンルールには対応しないが，これを，他の３近傍ルール関数で展開することにより，特性関数としての役割を発揮させせることができる．すなわち，

$$\tilde{f}_r^{(t)}(i) = \sum_{q:\mathit{independent\ Rule\#}} \alpha_r^q f_q(i)$$

なる分解表現が可能である．各ルール関数の係数 α は，時間発展後の実効的関数に含まれる３近傍オートマトンルール関数の割合を表わすもので，各ルールが時間発展によりどのようなルールの性質を顕在化させるかをみることができる．以上の特性表現を実際に各ルールに対して求めることができる．但し，安定状態を持たない奇数番号のルールは除く．シミュレーションの結果を以下の表に示す．これによれば，クラスⅣと言われている#54と#110の特徴として，他のクラスⅢルールに比べて，クラスⅡルールへの移行の割合が大きいことがわかる．すなわち，これらのルールが長い緩和時間を持つ原因は，カオス的なクラスⅢルールの性質と，リミットサイクル的なクラスⅡルールの性質の重ね合せによるものであることが結論できる．

	IR#	18	22	30	60	90	106	122	126	146	150	54	110
NR#	C	Ⅲ	Ⅲ	Ⅲ	Ⅲ	Ⅲ	Ⅲ	Ⅲ	Ⅲ	Ⅲ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅳ
-> Ⅱ		0.02	0.03					0.03	0.03	0.01		0.07	0.31
18	Ⅲ	0.97	0.26							0.98		0.01	
22	Ⅲ		0.64									0.17	
30	Ⅲ		0.03	1.00								0.01	
41	Ⅲ												0.03
45	Ⅲ												0.01
60	Ⅲ				1.00								
90	Ⅲ					1.00		0.94	0.94				
105	Ⅲ												
106	Ⅲ						1.00						0.20
122	Ⅲ							0.03	0.03				
126	Ⅲ												
146	Ⅲ	0.01								0.01			
150	Ⅲ		0.01								1.00		
54	Ⅳ		0.03									0.75	
110	Ⅳ												0.46
-> Ⅲ Ⅳ		0.98	0.97	1.00	1.00	1.00	1.00	0.97	0.97	0.99	1.00	0.93	0.69

３．結論

特性関数の分解表現によって，クラスⅣルールのソリトン的なふるまいの原因が，クラスⅡとⅢルールの重ね合せであることがわかった．これは，まさにクラスⅣルールがⅡ，Ⅲルールの境界に位置していることを示している結果であり，edge of chaos と呼ばれる理由である．これまでの，単一パラメータによる分類の場合，複数のクラスの性質を持つルールは，それらが相殺しあって，特徴ある値として表われにくかったが，分解表現では，各クラスの性質の所有程度がそのまま表現されるので，特にクラスⅣのルールの特徴を明確にすることが可能となった．また，すべてのクラスⅠルールの特性関数は#0のルール関数となり，クラスⅡ，Ⅲルールについても，分解表現の類似性によって分類することが可能である．

参考文献

[1]S. Wolfram, "Universarity and complexity in cellular automata", Physica, 10D (1984) 1.
[2]Y. Kayama, M. Tabuse, H. Nishimura, T. Horiguchi, "Characteristic Parameters and Classification of One- dimensional Cellular Automata", BAIKA Coll. preprint, (1992) to be published.