7N−9

論理関数に有限体上の表現を用いる検査系列生成の一方法

吉田清明　朱雀保正　元石浩二
久留米工業大学

1.はじめに

組合せ回路の単一縮退故障に対する検査系列生成法の一つにブール微分法[1]がある．ブール微分法では，出力Fを検査対象信号線hと入力変数の論理関数として表現し，排他的論理和を用いて形式的に定義されるブール微分を行う．これに対して論理関数に有限体[2]上の多項式表現$\hat{F}$を用いれば，もし$\hat{F}$がhの１次式であれば，$\hat{F}$のhに関する通常の微分がブール微分に等価であることを容易に示すことができる．$\hat{F}$がhの１次式でないときは１次式に変換するのは容易である．本稿は，この微分の性質と有限体上の多項式の代数的諸性質を用いて検査系列を生成する方法（以下，本手法）を提出し，簡単な例によりその計算法を示す．

2.論理関数の有限体GF(2)上での表現

n変数論理関数を$\{0,1\}^n$上で定義された$\{0,1\}$値関数であるとする．論理関数は通常ブール演算系を用いて表現されるが,これと等価な表現が有限体（ガロワ体）GF(2)演算系の上でも可能である．各演算系における等価な表現を表１に示す．ここで記号$+, \cdot$ はそれぞれ通常の算術和，算術積を意味する．

表１ 演算系の間で等価な表現

	ブール	GF(2)	
論理積	$x \cap y$	$x \cdot y$	$(\bmod 2)$
論理和	$x \cup y$	$x + y + x \cdot y$	$(\bmod 2)$
補元	$\overline{x}$	$x + 1$	$(\bmod 2)$
排他和	$x \oplus y$	$x + y$	$(\bmod 2)$

また有限体GF(2)の性質から次の定理１が容易に導かれる．

［定理１］ $x^n \equiv x \quad (\bmod 2)$ (1)

$2 \cdot n \cdot x \equiv 0 \quad (\bmod 2)$ (2)

ただし，nは自然数である．

3.1 ブール微分のブール演算系による表現

$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$をn変数論理関数とすると，変数x_iに関する関数Fのブール微分は次式のように定義される．

$$\frac{dF}{dx_i} = F(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n) \oplus F(x_1, \cdots, \overline{x_i}, \cdots, x_n) \quad (3)$$

上式にシャノンの展開定理

$$F(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n) = x_i \cap F_i(1) \oplus \overline{x_i} \cap F_i(0) \quad (4)$$

ただし

$$F_i(1) = F(x_1, \cdots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \cdots, x_n) \quad (5.a)$$

$$F_i(0) = F(x_1, \cdots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \cdots, x_n) \quad (5.b)$$

を用いると

$$\frac{dF}{dx_i} = F_i(1) \oplus F_i(0) \quad (6)$$

と変形できる．

3.2 GF(2)上でのブール微分の表現

GF(2)上では，論理関数は２を法とする多項式で表される．この多項式を任意の変数x_iについて展開したときに，２次以上の項があれば式(1)を用いて１次の項に変換できる．こうして得られる１次式は式(4)に表１の変換を施して得られるGF(2)上の多項式表現に等価である．次の定理に示すように，この１次式を変数x_iについて微分することによりブール微分が得られる．

［定理２］ 論理関数の有限体GF(2)上での多項式表現を$\hat{F}$と書く．$\hat{F}$が論理変数x_iの１次式であると仮定すると，$\hat{F}$のx_iに関する通常の微分はブール微分と等価である．

（証明）式(4)の関数Fに表１を用いて有限体GF(2)上の多項式表現$\hat{F}$を求めると

$$\begin{aligned}\hat{F}(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n) &= \hat{F}_i(1) \cdot x_i + \hat{F}_i(0) \cdot (x_i + 1) \\ &= (\hat{F}_i(1) + \hat{F}_i(0)) \cdot x_i + \hat{F}_i(0) \quad (7)\end{aligned}$$

となる．上式を変数x_iで形式的に微分すると次式が得られる．

A Test Generation Method Using the Expression of Logical Function on Galois Field

Kiyoaki YOSHIDA, Yasumasa SUJAKU, Kohji MOTOISHI
Kurume Institute of Technology

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial x_i} = \hat{F}_i(1) + \hat{F}_i(0) \tag{8}$$

一方，式(6)のブール微分を有限体GF(2)上の表現に変換すると次式が得られる．

$$\frac{d\hat{F}}{dx_i} = \hat{F}_i(1) + \hat{F}_i(0) \tag{9}$$

これは式(8)に等しい．　　　　(証明終)

4．単一縮退故障検出のための検査系列生成法（本手法）

4.1 入力信号線の故障検出

定理２および文献[1]により，組合せ回路の入力信号線x_iにおける単一縮退故障検出のための検査系列を生成するには次の方程式(10),(11)を解けばよいことがわかる．

[1] 信号線x_iの0縮退故障に対する検査系列を生成する場合：

$$x_i \cdot \frac{\partial \hat{F}}{\partial x_i} = 1. \tag{10}$$

[2] 信号線x_iの1縮退故障に対する検査系列を生成する場合：

$$(x_i + 1) \cdot \frac{\partial \hat{F}}{\partial x_i} = 1. \tag{11}$$

4.2 内部信号線の故障検出

同様に回路内部の信号線の縮退故障を考える．図１の回路に対して入力信号変数を

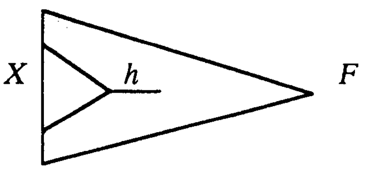

図1　組合せ回路と内部信号線h

$X = (x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$, 出力関数のGF(2)表現を$\hat{F}(X)$, 内部信号変数を$h$とする．$h$は入力変数の関数として表現することが可能で$h=h(X)$と書ける．出力関数$\hat{F}$も$h$を入力変数とみなして$X$と$h$の関数として表現することができる．この関数を$\widehat{F^*}$とする．すなわち

$$F^*(X, h) = \hat{F}(X). \tag{12}$$

従って回路内部の信号線hにおける単一縮退故障のための検査系列を生成するには次の方程式(13), (14)を解けばよい．

[3] 信号線hの0縮退故障に対する検査系列を生成する場合：

$$h(X) \cdot \frac{\partial \widehat{F^*}(X, h)}{\partial h} = 1. \tag{13}$$

[4] 信号線hの1縮退故障に対する検査系列を生成する場合：

$$(h(X) + 1) \cdot \frac{\partial \widehat{F^*}(x, h)}{\partial h} = 1. \tag{14}$$

5. 例題

本手法を用いて図2の回路における信号線B_1の0縮退故障のための検査系列を生成する．

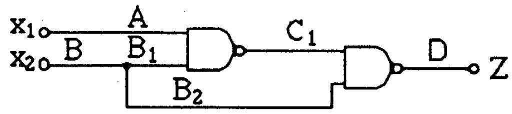

図2　回路例

$A = x_1;\ B = x_2;\ B_1 = B_2 = B = x_2;$

$C_1 = (A \cdot B_1) + 1 = x_1 \cdot B_1 + 1 = x_1 \cdot x_2 + 1;$

$D = (C_1 \cdot B_2) + 1 = (x_1 \cdot B_1 + 1) \cdot x_2 + 1 = x_1 \cdot B_1 \cdot x_2 + x_2 + 1;$

$$\frac{\partial D}{\partial B_1} = x_1 \cdot x_2 \tag{15}$$

信号線B_1の０縮退故障に対する検査系列を生成するのだから次の方程式を解けばよい．

$$B_1 \cdot \frac{\partial D}{\partial B_1} = x_2 \cdot (x_1 \cdot x_2) = x_1 \cdot x_2^2 = x_1 \cdot x_2 = 1 \tag{16}$$

式(16)より，求める検査系列は次式

$$(x_1, x_2) = (1, 1) \tag{17}$$

であることが判る．

6. おわりに

論理関数に有限体GF(2)上の多項式表現$\hat{F}$を用いれば，もし$\hat{F}$が内部変数hの１次式であれば，$\hat{F}$のhに関する通常の微分がブール微分に等価であることを示した．また，この微分の性質と有限体上の多項式の代数的諸性質を用いて検査系列を生成する方法を提出し，簡単な例によりその計算法を示した．今後は本手法をプログラム化し，ブール微分法と比較して，その有効性を明らかにして行く予定である．

文献

[1] F.F. Sellers, M.Y. Hiao and C.L. Bearnson, "Analyzing errors with Boolean difference," IEEE Trans. on Comput., vol. C-17, pp.676-683, July (1968).

[2] 高橋盤郎：組み合わせ理論とその応用，岩波書店 (1979).

[3] 藤原秀雄：コンピュータの設計とテスト 工学図書 (1990).

[4] P. K. Lala:フォールト・トレランス入門，オーム社 (1988).