

単位 4 元数積分曲面

三浦 憲二郎†

本研究では、単位 4 元数を用いて定義される、美しさを追求した新しい自由曲面：単位 4 元数積分 (QI) 曲面を提案する。これまでの Bézier 曲面や B-spline 曲面といったパラメトリック曲面では、位置を制御点で指定しそれらを混ぜ合わせるにより曲面を定義したが、QI 曲面では、接線ベクトルを混ぜ合わせて曲面を定義することを考え、まず、曲面の境界線となる 1 本の曲線を接線ベクトルを用いて定義する。さらに、境界線上の点を始点とする等パラメータ線の接線ベクトルを曲面上のすべての位置で指定する。接線ベクトルの指定には単位 4 元数曲線を用いる。一般的な単位 4 元数積分曲面の定義とともに、その特殊な場合である Bézier 形式の QI 曲面の定義とそれを用いた点群の内挿方法について論じる。

Unit Quaternion Integral Surface

KENJIRO T. MIURA†

This paper proposes a new type of free-form surfaces for fairness called unit quaternion integral (QI) surface. Although the traditional parametric representations like Bézier and NURBS surfaces blend control points to define a surface, we blend tangent vectors in the form of unit quaternion curves in one parameter direction to define iso-parametric lines as well as a boundary curve of the surface. We discuss the definition of the general quaternion integral surface and a special case: the Bézier unit quaternion integral surface. We also discuss a new interpolation method by using the Bézier-type QI surface.

1. はじめに

“美しい (fair)”, あるいは “見た目に心地よい (visually pleasing) 曲線や曲面の生成はさまざまな分野で重要であり、特に工業デザインやスタイリング分野では製品の良否を決定する主要因となっている。この論文で提案する単位 4 元数積分曲面 (unit integral quaternion: QI surface) は、滑らかで美しい曲線の生成を目的として考案された自由曲線である単位 4 元数積分曲線^{1),2)}の曲面への拡張となっている。

“美しい” 曲線や曲面とは何か、どのような性質を持つべきかに関する明確な数学的定義は存在しないし、美しい曲線や曲面を生成する決定的な方法は存在しない。しかしながら、美しさを決定する要因として「曲率」や「曲率の変化率」が重要であることは共通の認識である。したがって、曲線や曲面の接線方向や法線だけでなく、曲率や曲率の変化率をより直接的に制御できる方法が望まれる。

曲線に対してより直接的に曲率や曲率の変化を規定

する方法はクロソイド曲線である^{3)~6)}。クロソイド曲線 (コルニユの螺旋) はきわめて滑らかな (したがって、美しい) 2 次元曲線 (平面曲線) として知られ、高速道路の設計やロボットのコーナ軌道制御⁷⁾に用いられている。この曲線はフレネル (Fresnel) 積分を用いて以下のように定義される⁶⁾：

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \pi B \begin{pmatrix} C_s(t) \\ S_n(t) \end{pmatrix}. \quad (1)$$

ここで、スケーリング係数 πB は正であり、フレネル積分は、

$$C_s(t) = \int_0^t \cos \frac{\pi t^2}{2} dt, \quad S_n(t) = \int_0^t \sin \frac{\pi t^2}{2} dt \quad (2)$$

である。クロソイド曲線は、曲線の長さ按比例して曲率が連続的に変化する。曲線の形状を得るために積分が必要となるが、弧長の定数倍をパラメータとする三角関数によって一定の大きさ (ノルム) を持つ接線ベクトルを指定して曲線を定義するのが、クロソイド曲線の構成法である。

QI 曲線は上記の要求に応えるために、単位 4 元数を用いて単位ベクトルを任意軸周りに回転することに

† 静岡大学工学部機械工学科

Department of Mechanical Engineering, Shizuoka University

より, 曲線の方向ベクトルを指定する. 三浦¹⁾は, QI 曲線がクロソイド曲線を 3 次元に拡張・一般化した曲線であることを示し, 定義に用いる単位 4 元数曲線を変更することによってさまざまな曲線が表現できることを明らかにしている. さらに, 三浦²⁾は, QI 曲線を用いて点列を内挿する方法を提案している.

CG や CAD の分野で用いられている Bézier 曲線や B-spline 曲線のように位置を制御点で指定した場合, 曲率や曲率の変化率を制御する手段は曲線のデザイナー/設計者には明示的には与えられておらず, 制御点を動かすことによって曲率や曲率変化率が急変する場合は生じやすい. それに対して, QI 曲線では接線ベクトルを指定するので, 隣接する接線ベクトル間の変化を意識しながら曲面をデザイン/設計できるので曲率/曲率の変化率を考慮しやすいという特徴を持つ.

Coons 曲面 (たとえば, Farin⁸⁾参照) 等の古典的な曲面定義においては, 境界曲線の形状とともにそこでの 1 次微分ベクトルや 2 次微分ベクトルが明示的に用いられているが, それらのベクトルは境界線形状と相補的に使用されており, この論文で提案する単位 4 元数積分 (QI) 曲面での主体的な接線ベクトルの使用法とは根本的に異なる.

本研究では, QI 曲線の接線ベクトル指定法を利用した, 1 つのパラメータ方向のアイソパラメトリックラインが QI 曲線として定義される, 美しさを追求した新しいタイプの自由曲面として QI 曲面を提案する.

次章で QI 曲線について簡単に述べ, 3 章で本論文の主題である QI 曲面を定義する. 4 章で, QI 曲面の特殊化の一例である Bézier QI パッチを提案し, その曲面を用いた点列の内挿について 5 章で論じる. 最後に 6 章で, 結論とともに今後の研究課題を述べる.

2. 単位 4 元数積分曲線

2.1 単位 4 元数積分曲線の定義

s を弧長パラメータ, $q(s)$ を単位 4 元数曲線とすると, 単位 4 元数積分 (QI) 曲線は次式で定義される:

$$C(s) = P_0 + \int_0^s q(s) \hat{v}_0 q^{-1}(s) ds. \quad (3)$$

ここで, \hat{v}_0 は単位定数ベクトルである.

2.2 接線ベクトルと曲率, 曲率の変化率¹⁾

QI 曲線の接線ベクトル $t(s)$ は非常に簡単な次式で与えられ,

$$t(s) = \frac{dC(s)}{ds} = q(s) \hat{v}_0 q^{-1}(s) \quad (4)$$

そのノルムはつねに 1 である. 曲線の曲率 $\kappa(s)$ はベクトル $d^2C(s)/ds^2$ のノルムとして与えられ,

$$\begin{aligned} \kappa(s) &= \left| \frac{d^2C(s)}{ds^2} \right| \\ &= 2 \left| [\omega(s), \hat{v}_0] \right|. \end{aligned} \quad (5)$$

と表される. ここで, $[a, b]$ は 2 つの 3 次元ベクトル a と b の外積であり, $\omega(s)$ は, $dq(s)/ds = q(s)\omega(s)$ を満たす 3 次元ベクトルである.

上式より, 曲率の変化率 $\mu(s)$ は,

$$\begin{aligned} \mu(s) &= \frac{d\kappa(s)}{ds} \\ &= \frac{4}{\kappa(s)} \left(\left[\frac{d\omega(s)}{ds}, \hat{v}_0 \right], [\omega(s), \hat{v}_0] \right) \end{aligned} \quad (6)$$

である. ここで, (a, b) は 2 つの 3 次元ベクトル a と b の内積を表す.

2.3 Bézier QI 曲線¹⁾

この節では, その定義に用いられる単位 4 元数曲線が以下のような Bézier 曲線形式で与えられる QI 曲線: Bézier QI 曲線について説明する. 5 章で述べる点列の内挿では, この曲線に基づく QI 曲面を用いる.

曲線の全長を l , パラメータ $u = s/l$, $\hat{v}_0 = \hat{v}_x = (1, 0, 0)$ とし式 (3) を以下のように書き改める:

$$\begin{aligned} C(s) &= P_0 + \int_0^s q \left(\frac{s}{l} \right) \hat{v}_x q^{-1} \left(\frac{s}{l} \right) ds \\ &= P_0 + l \int_0^u q(u) \hat{v}_x q^{-1}(u) du, \\ &0 \leq u \leq 1. \end{aligned} \quad (7)$$

この式の $q(u)$ を, 次数 n の Bézier 曲線を利用して以下のように定義する:

$$\begin{aligned} q(u) &= \exp(\hat{v}(u)\beta(u)) \\ &= \cos(\beta(u)) + \hat{v}(u) \sin(\beta(u)). \end{aligned} \quad (8)$$

ここで,

$$\hat{v}(u) = (0, 0, \cos(\alpha(u)), \sin(\alpha(u))), \quad (9)$$

$$\alpha(u) = \sum_{i=0}^n \alpha_i B_{n,i}(u), \quad (10)$$

$$\beta(u) = \sum_{i=0}^n \beta_i B_{n,i}(u). \quad (11)$$

Bernstein 基底関数 $B_{n,i}(u) = \binom{n}{i} (1-u)^{n-i} u^i$ である. 図 1 に示したように, α_i と β_i を極座標値として次式で与えられる 4 元数 $v_i \in R^4$, $i = 0, \dots, n$ は,

$$v_i = (0, 0, \beta_i \cos(\alpha_i), \beta_i \sin(\alpha_i)) \quad (12)$$

と制限され, その結果 $v_i \in R^2$ (2 次元実空間) となる. この 4 元数は通常の Bézier 曲線の制御点の役割を果たすので制御 4 元数とよぶ. $v_i \in R^2$ であっても接線の向きを指定するには十分である. なぜならば, 剛体の向きを指定するための一般的な回転に比べ, 接

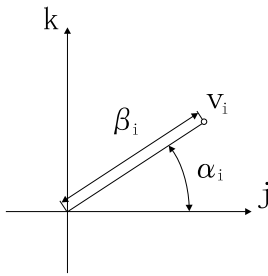


図1 単位4元数曲線を定義する4元数：制御4元数
Fig.1 Control quaternion.

線ベクトルの指定ではその接線ベクトル周りに回転させても接線の向きは変化せず，その回転の自由度が不要だからである．この制限により式(8)で表される単位4元数曲線は $q(u) \in S^2$ (3次元実空間内の単位球) となり， $q(u)$ により表される回転の回転軸はつねに \hat{v}_x に直交する．

式(8)で定義される単位4元数曲線を Bézier 単位4元数曲線とよび，Bézier 単位4元数曲線を用いて定義される QI 曲線を Bézier QI 曲線とよぶ．Bézier 単位4元数曲線の次数が n であるとき，Bézier QI 曲線の次数は積分されるので実質的には $n+1$ であるが，定義に用いられる次数を重視して，QI 曲線の次数も n という．

5章では，QI 曲面の定義に上述した Bézier 曲線形式に基づく単位4元数曲線を用いた Bézier QI パッチを用いる．Bézier 曲線だけでなく，Hermite 曲線や NURBS(Non-Uniform Rational B-Spline) 曲線，その他の自由曲線形式を応用して QI 曲面を定義することもできる．

3. 単位4元数積分曲面

本章では，QI 曲線に基づいて4元数積分(QI)曲面を定義する．

3.1 望ましい性質

2つの弧長パラメータ s と t の関数として定義される曲面 $S(s, t)$ の1次微分ベクトル $\partial S(s, t)/\partial s = s(s, t)$ と $\partial S(s, t)/\partial t = t(s, t)$ が与えられていると仮定する．すると $S(s, t)$ は，

$$S(s, t) = P_0 + \int_{path} (s(s, t)ds + t(s, t)dt) \quad (13)$$

と定義できる．ここで， $path$ はパラメータ空間上でその原点から点 (s, t) への積分経路である．曲面 $S(s, t)$ 上のすべての点の位置が経路に依存しないための条件は，パラメータ空間上の任意の閉じたループ l に対して，

$$\oint_l \left(\frac{\partial S}{\partial s} ds + \frac{\partial S}{\partial t} dt \right) = \oint_l (s(s, t)ds + t(s, t)dt) = \mathbf{o} \quad (14)$$

が成り立つことである．ストークスの定理より，上式は，

$$\iint_a \text{rot}(s(s, t), t(s, t)) ds dt = \mathbf{o} \quad (15)$$

となる．すなわち，パラメータ空間上の任意の領域 a において，

$$\iint_a \left(\frac{\partial s(s, t)}{\partial t} - \frac{\partial t(s, t)}{\partial s} \right) ds dt = \mathbf{o}. \quad (16)$$

これは，パラメータ空間上の任意の点で，

$$\frac{\partial s(s, t)}{\partial t} = \frac{\partial t(s, t)}{\partial s} \quad (17)$$

であることを意味する．

3.2 簡単な解

式(17)を満足する解は，

$$\frac{\partial s(s, t)}{\partial t} = \frac{\partial t(s, t)}{\partial s} = \mathbf{o} \quad (18)$$

の条件を与えることによって簡単に得られる．この条件は，

$$s(s, t) = f(s), \quad t(s, t) = g(t). \quad (19)$$

であることを意味し， $s(s, t)$ と $t(s, t)$ がそれぞれ異なる1つのパラメータの関数となる．

式(18)の条件は，定義できる曲面の種類を強く限定してしまうが，以下に示すような複雑な曲面を表現することが可能である． $f(s)$ と $g(t)$ が次式で与えられると仮定する．

$$f(s) = q_s(s) \hat{v}_0 q_s^{-1}(s), \quad (20)$$

$$g(t) = q_t(t) \hat{v}_0 q_t^{-1}(t). \quad (21)$$

$f(s)$ の \hat{v}_0 には $\hat{v}_x = (1, 0, 0)$ を用い $q_s(s) = \exp(-\omega_y s)$ とし， $g(t)$ の \hat{v}_0 には $\hat{v}_y = (0, 1, 0)$ を用い $q_t(t) = \exp(\omega_x t)$ とすると，図2に示した曲面が得られる． $q_s(s)$ は s 方向の接線ベクトルを y 軸周りに s の値に比例して回転させるので， $t = t_0$ として得られるアイソパラメトリックライン $S(s, t_0)$ は t_0 の値に依存せず xz 平面に平行な半径1の円弧となる． $s = s_0$ として得られるアイソパラメトリックライン $S(s_0, s)$ も同様に半径1の円弧となるが， x 軸周りの回転で接線ベクトルが指定されるので yz 平面に平行である．

また， $q_s(s) = \exp(-\omega_y s^2)$ ， $q_t(t) = \exp(\omega_x t^2)$ とすると図3に示した曲面が得られる．この曲面では， $q_s(s)$ は s 方向の接線ベクトルを y 軸周りに s の2乗に比例して回転させるので， $t = t_0$ として得られるアイソパラメトリックライン $S(s, t_0)$ は xz 平面に

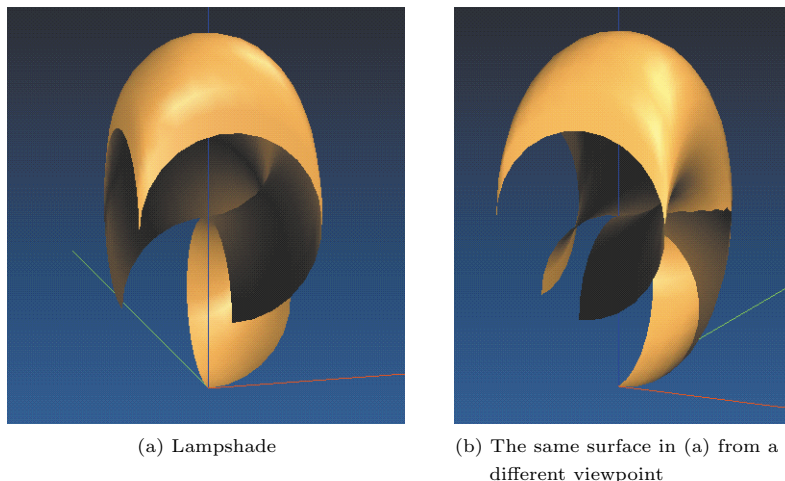


図 2 ランプシェイド : $q_s(s) = \exp(\omega_y s)$, $q_t(t) = \exp(\omega_z t)$, $0 \leq s, t \leq 1.5\pi$
 Fig. 2 Lampshade: $q_s(s) = \exp(\omega_y s)$, $q_t(t) = \exp(\omega_z t)$, $0 \leq s, t \leq 1.5\pi$.

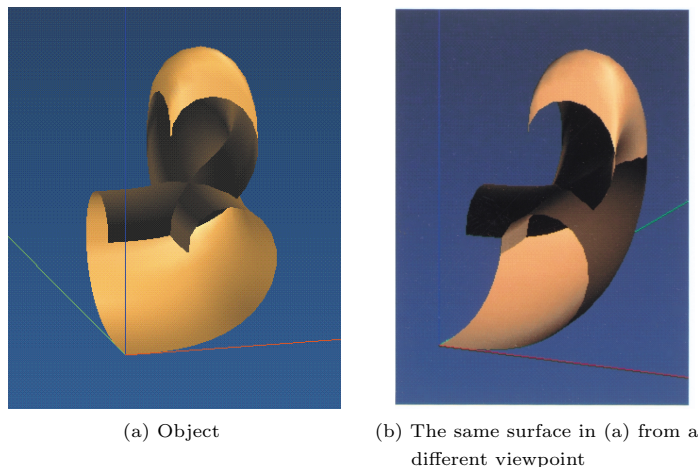


図 3 オブジェクト : $q_s(s) = \exp(\omega_y s^2)$, $q_t(t) = \exp(\omega_z t^2)$, $0 \leq s, t \leq 0.7\pi$
 Fig. 3 Object: $q_s(s) = \exp(\omega_y s^2)$, $q_t(t) = \exp(\omega_z t^2)$, $0 \leq s, t \leq 0.7\pi$.

平行なクロソイド曲線となる . $s = s_0$ として得られるアイソパラメトリックライン $S(s_0, s)$ も同様に yz 平面に平行なクロソイド曲線である .

3.3 より一般的な解

3.1 節で説明したように , 一般的には $s(s, t) = \partial S / \partial s$ と $t(s, t) = \partial S / \partial t$ の 2 つの微分ベクトルを同時に独立に指定することは不可能である . そこで , $s(s, t)$ をまず指定することを考える . 式 (17) より $t(s, t)$ は ,

$$t(s, t) = t(0, t) + \int_0^s \frac{\partial t(s, t)}{\partial s} ds \tag{22}$$

$$= t_0(t) + \int_0^s \frac{\partial s(s, t)}{\partial t} ds \tag{23}$$

によって計算される . 上式から分かるように , パラメータ空間全域で $t(s, t)$ を指定することはできないが , $s = 0$ での $t_0(t) = t(0, t)$ は指定することができる .

以下のように ,

$$s(s, t) = q_s(s, t) \hat{v}_0 q_s^{-1}(s, t), \quad \text{かつ} \tag{24}$$

$$t_0(t) = q_t(t) \hat{v}_0 q_t^{-1}(t) \tag{25}$$

と仮定する . $q_t(t)$ として同じ関数 $\exp(\omega_z \frac{\pi}{4}) = (0, 0, 0, 1)$ を用いても , $q_s(s, t)$ を $\exp(\omega_y (s + t))$ や $\exp(\omega_y (0.2s^2 + t))$, $\exp(\omega_y (s + 0.2t^2))$ と変えることによって , 図 4 や図 5 , 図 6 に示したさまざまな曲面が得られる .

ここで注意すべきことは , $S(0, t)$ にそってパラメー

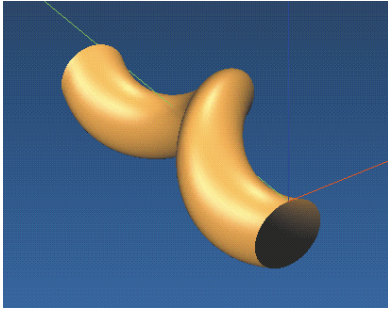


図4 チューブ No.1: $q_s(s, t) = \exp(\omega_y(s + t))$,
 $q_t(t) = (0, 0, 0, 1)$, $0 \leq s \leq \pi$, $0 \leq t \leq 4$
 Fig. 4 Tube No.1: $q_s(s, t) = \exp(\omega_y(s + t))$,
 $q_t(t) = (0, 0, 0, 1)$, $0 \leq s \leq \pi$, $0 \leq t \leq 4$.

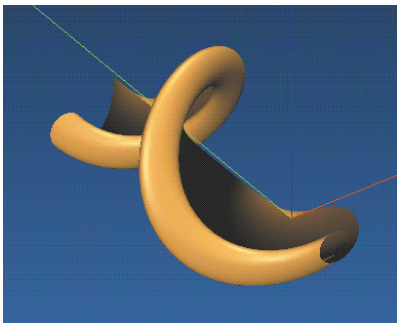


図5 チューブ No.2: $q_s(s, t) = \exp(\omega_y(0.2s^2 + t))$,
 $q_t(t) = (0, 0, 0, 1)$, $0 \leq s \leq \pi$, $0 \leq t \leq 4$
 Fig. 5 Tube No.2: $q_s(s, t) = \exp(\omega_y(0.2s^2 + t))$,
 $q_t(t) = (0, 0, 0, 1)$, $0 \leq s \leq \pi$, $0 \leq t \leq 4$.

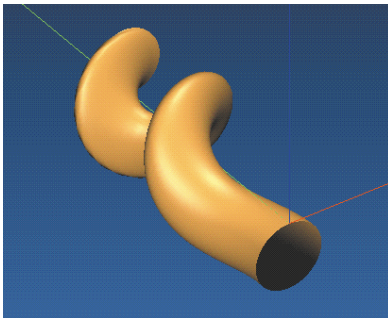


図6 チューブ No.3: $q_s(s, t) = \exp(\omega_y(s + 0.2t^2))$,
 $q_t(t) = (0, 0, 0, 1)$, $0 \leq s \leq \pi$, $0 \leq t \leq 4$
 Fig. 6 Tube No.3: $q_s(s, t) = \exp(\omega_y(s + 0.2t^2))$,
 $q_t(t) = (0, 0, 0, 1)$, $0 \leq s \leq \pi$, $0 \leq t \leq 4$.

タ t は $S(0, 0)$ から $S(0, t)$ への弧長となっているが, $s \neq 0$ では弧長になっているとは保証されない。

4. Bézier QI パッチ

本章では, $t_0(t)$ は Bézier QI 曲線であり, $s(s, t)$ は Bézier QI 曲線に基づいた形式で与えられる曲面を定義する。このタイプの曲面を Bézier4 元数積分

(quaternion integral: QI) パッチとよぶ。これは QI 曲面の一種であるが, Bézier パッチの用語に従い「曲面」ではなく「パッチ」とよぶ。任意の曲線を $t_0(t)$ として指定できるので, Bézier QI 曲線以外の曲線を使用した場合でも, 広義の意味で Bézier QI パッチとよぶ。

Bézier QI パッチ $S(s, t)$ において, $t = 0$ と $t = 1$ でのパッチの境界線の長さを, それぞれ l_{s0} と l_{s1} とする。レンダリングや交点計算といった幾何演算の処理の効率を考慮すると長方形のパラメータ空間を持つことが望ましい。そこで, $l_{s0} = l_{s1} = l_s$ と仮定する。同様に, $s = 0$ での境界線の長さを l_t と仮定する。 $\partial S / \partial s = s(s, t)$ を次式で定義する:

$$s(s, t) = q_s \left(\frac{s}{l_s}, \frac{t}{l_t} \right) \hat{v}_0 q_s^{-1} \left(\frac{s}{l_s}, \frac{t}{l_t} \right) \quad (26)$$

$$= q_s(u, v) \hat{v}_0 q_s^{-1}(u, v), \quad (27)$$

ここで, $u = s/l_s$, $v = t/l_t$ であり $q_s(u, v)$ は制御 4 元数 $q_{si,j} = \exp(\hat{v}_{si,j} \beta_{si,j}) = (\cos(\beta_{si,j}), 0, \cos(\alpha_{si,j}) \sin(\beta_{si,j}), \sin(\alpha_{si,j}) \sin(\beta_{si,j}))$, $i = 0, \dots, m$, $j = 0, \dots, n$ を用いて, 以下のように定義する:

$$\begin{aligned} q_s(u, v) &= \exp(v_s(u, v)) \\ &= \exp(\hat{v}_s(u, v) \beta_s(u, v)) \\ &= \cos(\beta_s(u, v)) + \hat{v}_s(u, v) \sin(\beta_s(u, v)). \end{aligned} \quad (28)$$

ここで,

$$\hat{v}_s(u, v) = (0, 0, \cos(\alpha_s(u, v)), \sin(\alpha_s(u, v))), \quad (29)$$

$$\alpha_s(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_{m,i}(u) B_{n,j}(v) \alpha_{si,j}, \quad (30)$$

$$\beta_s(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_{m,i}(u) B_{n,j}(v) \beta_{si,j}. \quad (31)$$

図7と図8に Bézier QI パッチの例を示す。これらは 9 つの制御 4 元数 $q_{si,j}$, $i, j = 0, 1, 2$ で $q_s(u, v)$ を定義し, $t_0(t)$ には 2 次 Bézier QI 曲線を用いている。

5. Bézier QI パッチによる点群の内挿

本章では, グリッド状に与えられた点群を QI 曲面で内挿する方法について述べる。生成される曲面は Bézier QI パッチで構成され, G^1 連続性 (接平面の連続性) を持つ。生成アルゴリズムは以下の 3 ステップよりなる:

- (1) 図9に示すように, パラメータ s 方向の 1 列に並んだ点列ごとに 2 次 Bézier QI 曲線で内挿する。さらに, パラメータ t 方向に 1 本だけ $t_0(t)$ となる曲線を点列を内挿する 2 次 Bézier

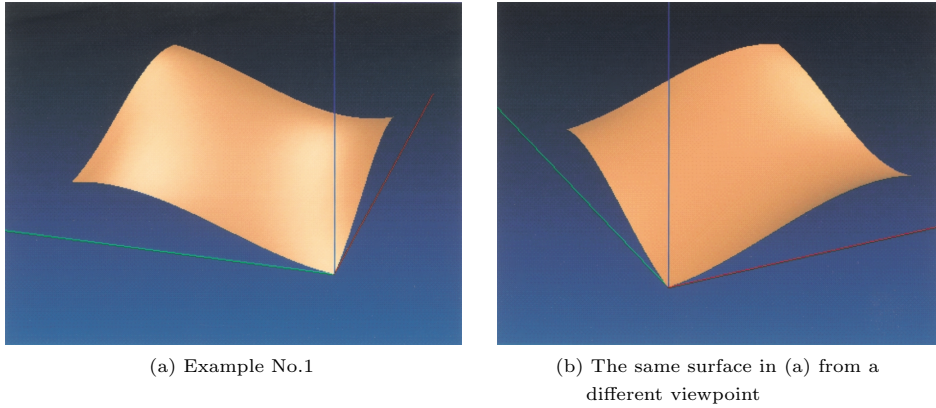


図 7 Bézier QI パッチ 例 No.1
Fig. 7 Bézier QI patch example No.1.

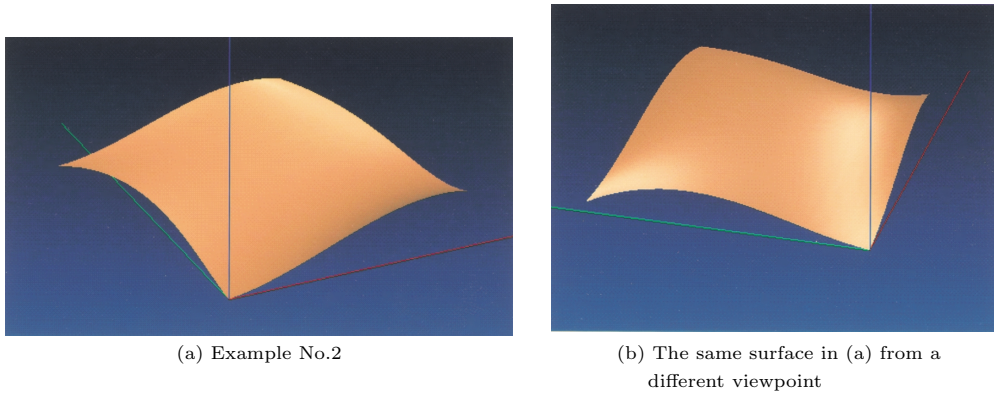


図 8 Bézier QI パッチ 例 No.2
Fig. 8 Bézier QI patch example No.2.

QI 曲線として生成する .

- (2) ステップ (1) で生成したパラメータ s 方向の曲線を, ユーザが指定した長さを持つ複数の 3 次 Bézier QI 曲線で近似する .
- (3) 曲面を構成する Bézier QI パッチの制御 4 元数のうち, 境界線を決定する制御 4 元数はステップ (2) で決定されているので, それら以外の制御 4 元数を決定する . 制御 4 元数は曲面が G^1 連続性を持つように決定する .

以下にこれらの処理の詳細について述べる .

5.1 ステップ (1)

三浦²⁾が示したように, 区分 2 次 Bézier QI 曲線を用いると, G^2 連続性を保ちながら 3 次元の点列を内挿する曲線を生成することができる . この方法を採用して点列を内挿する .

点列を $Q_{i,j}, i = 0, \dots, m_j, j = 0, \dots, n$ と仮定する . このステップで生成したパラメータ s 方向の曲線は, 次のステップで 3 次 Bézier QI 曲線で近似するの

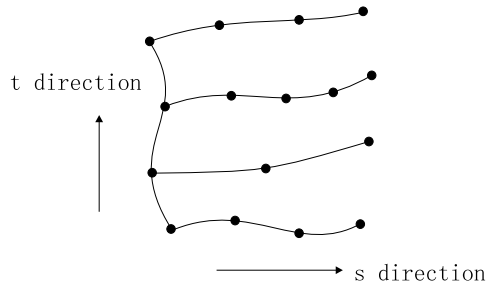


図 9 Bézier QI 曲線の生成
Fig. 9 Generation of Bézier QI curves.

で, 異なった列を構成する点の数は同一である必要はない . すなわち, $m_j + 1$ は異なった j に対して異なることが許される . これは, 点 $Q_{i,j}$ が必ずしもある Bézier QI パッチのコーナ点にならないことを意味している .

5.2 ステップ (2)

4 章で説明したように, s 方向の 2 つの境界線の長

さは一致するのが望ましいので、近似処理によって各区分曲線の長さを一致させる。ここで、3次曲線を用いるのは、接続部を含む曲線を近似するには、近似の際の誤差を減らすために、より次数の高い曲線を用いるのが望ましいからである。近似曲線は、その両端点の位置とそこでの1次微分ベクトルが一致するように決定する。

このステップでは元の曲線を近似するので、厳密に言えば、ここで述べる曲面生成法は、内挿法ではなく近似法である。

5.3 ステップ(3)

曲面全体に G^1 連続性を保証するために、Bézier QI パッチの制御4元数 $q_{si,j}$, $i = 0, \dots, 3, j = 0, 1, 2$ を以下のように定める:

- (1) パラメータ s 方向の境界線に対応する3次 Bézier QI 曲線の制御4元数を $q_{si,j}$, $i = 0, \dots, 3, j = 0, 2$ とする。
- (2) パラメータ s 方向の境界線でも G^1 連続性を保証するために、 $q_{si,j}$, $i = 0, \dots, 3, j = 1$ を以下の方法で定める(ここで示す方法を用いる理由についてはこの節の末尾で説明する): 図10に示すように、 s 方向の境界線を境として連結する2つのパッチ $S^{k,l}$ と $S^{k,l+1}$ (k と l は0からカウントする)の制御4元数 $q_{si,j}^{k,l}$ を定める $\alpha_{si,j}^{k,l}$ と $\beta_{si,j}^{k,l}$ $i = 0, \dots, 3$ に対して、

$$\frac{1}{l_t^{l+1}}(\alpha_{si,1}^{k,l+1} - \alpha_{si,0}^{k,l+1}) = \frac{1}{l_t^l}(\alpha_{si,2}^{k,l} - \alpha_{si,1}^{k,l}), \quad (32)$$

$$\frac{1}{l_t^{l+1}}(\beta_{si,1}^{k,l+1} - \beta_{si,0}^{k,l+1}) = \frac{1}{l_t^l}(\beta_{si,2}^{k,l} - \beta_{si,1}^{k,l}). \quad (33)$$

ここで、 l_t^l は $S^{k,l}$ のパラメータ t の最大値 ($t_0(t)$ の $S^{0,l}$ に含まれる QI 曲線の長さ)とする。もし、 $\alpha_{si,1}^{k,0}$ と $\beta_{si,1}^{k,0}$ を何らかの方法で決定すれば、他の $\alpha_{si,1}^{k,l}$, $\beta_{si,1}^{k,l}$ は以下のような帰納的な方法で決定される:

$$\alpha_{si,1}^{k,l+1} = \alpha_{si,0}^{k,l+1} + \frac{l_t^{l+1}}{l_t^l}(\alpha_{si,2}^{k,l} - \alpha_{si,1}^{k,l}) \quad (34)$$

$$= \alpha_{si,2}^{k,l} + \frac{l_t^{l+1}}{l_t^l}(\alpha_{si,2}^{k,l} - \alpha_{si,1}^{k,l}). \quad (35)$$

同様に、

$$\beta_{si,1}^{k,l+1} = \beta_{si,2}^{k,l} + \frac{l_t^{l+1}}{l_t^l}(\beta_{si,2}^{k,l} - \beta_{si,1}^{k,l}). \quad (36)$$

$S^{k,l}$ の $t_0(t)$ に関しては、もし、このパッチがス

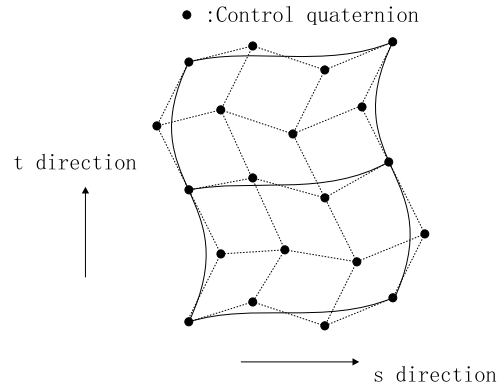


図10 s 方向の境界線を境として連結した2つのパッチ
Fig. 10 Two patches connected with an edge along s direction.

テップ(1)で生成した t 方向の曲線の一部を含む、すなわち、 $k = 0$ の場合、その部分曲線を $t_0(t)$ として用いる。もし、そうでなければ、 $S^{k-1,l}(l_s, t)$ が $t_0(t)$ として用いられる。ここで、 l_s はステップ(2)で指定した長さである。

$S^{k,l}$ と $S^{k,l+1}$ との t 方向の境界線において、 G^1 連続性が保証されるのは、それらが境界線を共有し、同じ単位4元数曲線によって $\partial S / \partial s$ を指定することから自明である。しかしながら、 $S^{k,l}$ と $S^{k,l+1}$ との s 方向の境界線において、 G^1 連続性が保証されるかはそれほど明らかではない。ここでは、それがどのように保証されているかについて説明する。

付録A.3に示すように、 $S^{k,l+1}(s, t)$ の境界線での t 方向の1次微分: $t^{k,l+1}(s, 0)$ は、

$$\begin{aligned} t^{k,l+1}(s, 0) &= t_0^{k,l+1}(0) + \int_0^s \frac{\partial s(s, 0)}{\partial t} dt \quad (37) \\ &= t_0^{k,l+1}(0) + \frac{2}{l_t^{l+1}} \int_0^s q_s^{k,l+1}(u, 0) \\ &\quad [\omega_s^{k,l+1}(u, 0), \hat{v}_0] q_s^{-1}(u, 0) ds \quad (38) \end{aligned}$$

と表される。ここで、 $\hat{v}_0 = \hat{v}_x$ とすると、

$$\begin{aligned} &[\omega_s^{k,l+1}(u, 0), \hat{v}_x] \\ &= \frac{3}{2}(0, 0, -\sin(\alpha_{s0}^{k,l+1}(u)), -\cos(\alpha_{s0}^{k,l+1}(u))) \\ &\quad \sin(2\beta_{s0}^{k,l+1}(u)) \times \left(\sum_{i=0}^2 B_{2,i}(\alpha_{si,1}^{k,l+1} - \alpha_{si,0}^{k,l+1}) \right) \\ &\quad + 3(0, 0, \cos(\alpha_{s0}^{k,l+1}(u)), -\sin(\alpha_{s0}^{k,l+1}(u))) \\ &\quad \times \left(\sum_{i=0}^2 B_{2,i}(\beta_{si,1}^{k,l+1} - \beta_{si,0}^{k,l+1}) \right) \quad (39) \end{aligned}$$

である。

$t^{k,l}(s, l_t^l)$ は式 (38) と同様に表され, $[\omega_s^{k,l}(u, 1), \hat{v}_x]$ は,

$$\begin{aligned}
 & [\omega_s^{k,l}(u, 1), \hat{v}_x] \\
 &= \frac{3}{2}(0, 0, -\sin(\alpha_{s2}^{k,l}(u)), -\cos(\alpha_{s2}(u))) \\
 & \quad \sin(2\beta_{s2}^{k,l}(u)) \times \left(\sum_{i=0}^2 B_{2,i}(\alpha_{si,2}^{k,l} - \alpha_{si,1}^{k,l}) \right) \\
 & \quad + 3(0, 0, \cos(\alpha_{s2}^{k,l}(u)), -\sin(\alpha_{s2}^{k,l}(u))) \\
 & \quad \times \left(\sum_{i=0}^2 B_{2,i}(\beta_{si,2}^{k,l} - \beta_{si,1}^{k,l}) \right) \quad (40)
 \end{aligned}$$

となる. したがって, 式 (32), (33) は,

$$\frac{\partial s^{k,l+1}(s, 0)}{\partial t} = \frac{\partial s^{k,l}(s, l_t^l)}{\partial t}, \quad 0 \leq s \leq l_s. \quad (41)$$

を保証する. よって,

$$t^{k,l+1}(s, 0) = t^{k,l}(s, l_t^l), \quad 0 \leq s \leq l_s \quad (42)$$

である. 隣接した 2 つのパッチが境界線を共有し, $s = 0$ の場合も含めて共通の 1 次微分 $\partial S / \partial t$ を持つので, G^1 連続性が保証される.

アルゴリズムの実装では, 式 (35), (36) で表された帰納的な処理のために, $\alpha_{si,1}^{k,0}$ と $\beta_{si,1}^{k,0}$ を以下のように定める:

$$\alpha_{si,1}^{k,0} = \frac{1}{2}(\alpha_{si,0}^{k,0} + \alpha_{si,2}^{k,0}), \quad (43)$$

$$\beta_{si,1}^{k,0} = \frac{1}{2}(\beta_{si,0}^{k,0} + \beta_{si,2}^{k,0}). \quad (44)$$

図 11 は上述した方法によって生成された, 9 つの Bézier QI パッチからなる内挿曲面を示している. 他の例を図 12 に示す. 曲面の生成に要した時間(制御 4 元数の算出と積分)を表 1 に示す. 各 Bézier QI パッチのパラメータ空間を 10×10 個の四辺形領域に分割し, 個々の領域を 2 分割して三角形領域としてその領域に対応する曲面を三角形で近似する. 四辺形の 1 辺に対応する区間の積分は, 区間を 10 に等分割して Simpson 則による数値積分を行っている.

6. おわりに

本研究では, 4 元数を用いて定義される美しさを追求した新しい自由曲面: 4 元数積分曲面を提案した. この曲面はクロソイド曲線の 3 次元空間への拡張・一般化した QI 曲線に基づき, 定義に用いる制御 4 元数を変更することによってさまざまな曲面を表現することができる. 一般的な単位 4 元数積分曲面の定義と性質を論じるとともに, その特殊な場合である Bézier QI

表 1 Indy MIPS R4600 64 M バイトによる曲面生成のための処理時間

Table 1 Processing time for generation of QI surfaces by Indy MIPS R4600 64 Mbyte.

	Calculation of quaternions	Integration	Total
Example No.1	0.37 sec	3.23 sec	3.60 sec
Example No.2	0.86 sec	5.47 sec	6.33 sec

パッチの定義とそれを用いた点群の近似的な内挿方法について論じた.

QI 曲面はその形状を求めるために積分を必要とするが, 実用化のためにはその高速化は重要な研究課題である. QI 曲面は従来のパラメトリック曲面と大きくその性質が異なり, QI 曲面に独自の入力法や変形法が必要である. 入力法, 変形法の研究とともに, 既存の曲面との混在を許しながら, QI 曲面をより使いやすくするシステムについても今後研究する.

参考文献

- 1) 三浦憲二郎: 単位 4 元数積分曲線, 情報処理学会論文誌, Vol.38, No.11, pp.2227-2236 (1997).
- 2) 三浦憲二郎: 単位 4 元数積分曲線による点列の内挿, 情報処理学会論文誌, Vol.39, No.7, pp.2159-2167 (1998).
- 3) Mehlum, E.: Nonlinear Splines, *Computer Aided Geometric Design*, Barnhill, R.E. and Riesenfeld, R.F. (Eds.), pp.173-207, Academic Press (1974).
- 4) Pal, T.K.: Intrinsic Spline Curve with Local Control, *Computer Aided Design*, Vol.10, No.1, pp.19-29 (1978).
- 5) Walton, D.J. and Meek, D.S.: Clothoidal Splines, *Computers and Graphics*, Vol.14, No.1, pp.95-100 (1990).
- 6) Meek, D.S. and Thomas, R.S.D.: A Guided Clothoid Spline, *Computer Aided Geometric Design*, Vol.8, pp.163-174 (1991).
- 7) Makino, H. and Suda, H.: Continuous Path Control Using Clothoidal Interpolation, *Proc. 20th ISIR*, Tokyo, p.1159 (1989).
- 8) Farin, G.: *Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design*, 4th Edition, Academic Press (1997).

付 録

A.1 Bézier 単位 4 元数曲線の 1 次微分

Bézier 単位 4 元数曲線 $q(u)$ が次式で与えられているとする:

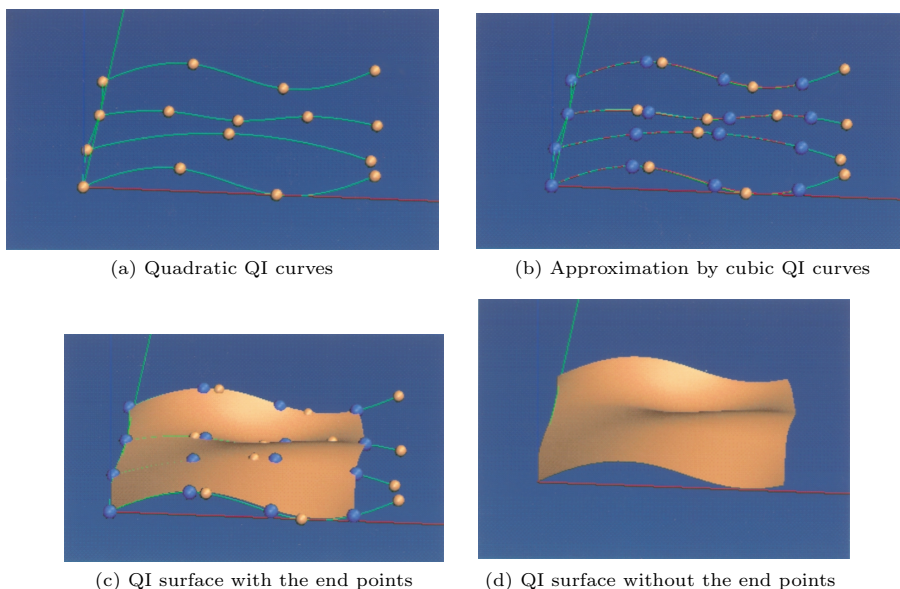


図 11 Bézier QI パッチによる内挿例: No.1 (金色の球: 与えられた点, 緑色の曲線: 2次 QI 曲線, 青色の球: 3次 QI 曲線の端点, 赤色の曲線: 2次 QI 曲線)

Fig. 11 Interpolation example by Bézier QI patches: No.1 (Gold ball: given point, Green line: quadratic QI curve, Blue point: end point of cubic QI curve, Red line: cubic QI curve).

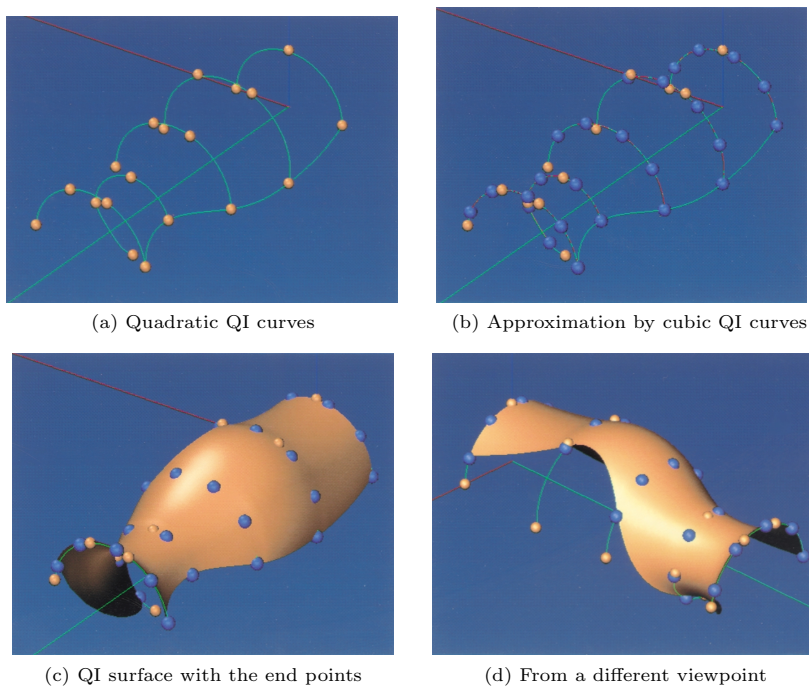


図 12 Bézier QI パッチによる内挿例: No.2 (金色の球: 与えられた点, 緑色の曲線: 2次 QI 曲線, 青色の球: 3次 QI 曲線の端点, 赤色の曲線: 3次 QI 曲線)

Fig. 12 Interpolation example by Bézier QI patches: No.2 (Gold ball: given point, Green line: quadratic QI curve, Blue point: end point of cubic QI curve, Red line: cubic QI curve).

$$q(u) = \exp(\hat{v}(u)\beta(u)) = \cos(\beta(u)) + \hat{v}(u) \sin(\beta(u)). \quad (45)$$

ここで,

$$\hat{v}(u) = (0, 0, \cos(\alpha(u)), \sin(\alpha(u))), \quad (46)$$

$$\alpha(u) = \sum_{i=0}^n B_{n,i}(u)\alpha_i, \quad (47)$$

$$\beta(u) = \sum_{i=0}^n B_{n,i}(u)\beta_i. \quad (48)$$

1 次微分 $dq(u)/du$ は,

$$\frac{dq(u)}{du} = q(u)\omega(u) \quad (49)$$

で与えられ,

$$\begin{aligned} \omega(u) = & \frac{1}{2}(0, -\sin^2(\beta(u)), -\sin(\alpha(u)), \\ & \cos(\alpha(u)) \sin(2\beta(u)) \frac{d\alpha(u)}{du} + \\ & (0, 0, \cos(\alpha(u)), \sin(\alpha(u))) \frac{d\beta(u)}{du}. \end{aligned} \quad (50)$$

したがって, $\omega(0)$ と $\omega(1)$ は,

$$\begin{aligned} \omega(0) = & \frac{n}{2}(0, -\sin^2(\beta_0), -\sin(\alpha_0), \\ & \cos(\alpha_0) \sin(2\beta_0)(\alpha_1 - \alpha_0) + \\ & n(0, 0, \cos(\alpha_0), \sin(\alpha_0))(\beta_1 - \beta_0), \quad (51) \\ \omega(1) = & \frac{n}{2}(0, -\sin^2(\beta_n), -\sin(\alpha_n), \\ & \cos(\alpha_n) \sin(2\beta_n)(\alpha_n - \alpha_{n-1}) + \\ & n(0, 0, \cos(\alpha_n), \sin(\alpha_n))(\beta_n - \beta_{n-1}). \end{aligned} \quad (52)$$

A.2 Bézier QI 曲線の 1 次, 2 次微分

長さが l である Bézier QI 曲線は,

$$C(s) = P_0 + \int_0^s q\left(\frac{s}{l}\right) \hat{v}_0 q^{-1}\left(\frac{s}{l}\right) ds \quad (53)$$

$$= P_0 + l \int_0^u q(u) \hat{v}_0 q^{-1}(u) du, \quad (54)$$

と表される。ここで, $u = s/l$ であり, $q(u)$ は式 (45) で与えられるとする。1 次微分: $dC(s)/ds$, 2 次微分: $d^2C(s)/ds^2$ は,

$$\frac{dC(s)}{ds} = q(u) \hat{v}_0 q^{-1}(u), \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2C(s)}{ds^2} = & \frac{1}{l} \left(\frac{dq(u)}{du} \hat{v}_0 q^{-1}(u) + \right. \\ & \left. q(u) \hat{v}_0 \frac{dq^{-1}(u)}{du} \right) \quad (56) \\ = & \frac{1}{l} (q(u)\omega(u) \hat{v}_0 q^{-1}(u)) \end{aligned}$$

$$-q(u) \hat{v}_0 \omega(u) q^{-1}(u) \quad (57)$$

$$= \frac{2}{l} q(u) [\omega(u), \hat{v}_0] q^{-1}(u) \quad (58)$$

となる。ここで, $[\cdot, \cdot]$ は 2 つの純粋なベクトル 4 元数の外積を意味し, $\omega(u)$ は式 (50) で与えられる。式 (51) と (52) で与えられる $\omega(0)$, と $\omega(1)$ を用いて, $d^2C(0)/ds^2$ と $d^2C(l)/ds^2$ は,

$$\frac{d^2C(0)}{ds^2} = \frac{2}{l} q(0) [\omega(0), \hat{v}_0] q^{-1}(0) \quad (59)$$

$$\frac{d^2C(l)}{ds^2} = \frac{2}{l} q(1) [\omega(1), \hat{v}_0] q^{-1}(1) \quad (60)$$

となる。

A.3 Bézier QI パッチの 1 次微分

Bézier QI パッチを $S(s, t)$ とし, $s = 0$ の境界線と $t = 0$ の境界線の長さをそれぞれ l_s と l_t とすると,

$$S(s, t) = P_0 + \int_{path} \left(\frac{\partial S(s, t)}{\partial s} ds + \frac{\partial S(s, t)}{\partial t} dt \right) \quad (61)$$

$$= P_0 + \int_{path} (s(s, t) ds + t(s, t) dt). \quad (62)$$

ここで, $s(s, t)$ は,

$$s(s, t) = q_s\left(\frac{s}{l_s}, \frac{t}{l_t}\right) \hat{v}_0 q_s^{-1}\left(\frac{s}{l_s}, \frac{t}{l_t}\right) \quad (63)$$

$$= q_s(u, v) \hat{v}_0 q_s^{-1}(u, v) \quad (64)$$

であり, $u = s/l_s$, $v = t/l_t$. $q_s(u, v)$ は制御 4 元数 $q_{si,j} = \exp(\hat{v}_{si,j} \beta_{si,j}) = (\cos(\beta_{si,j}), 0, \cos(\alpha_{si,j}) \sin(\beta_{si,j}), \sin(\alpha_{si,j}) \sin(\beta_{si,j}))$, $i = 0, \dots, m$, $j = 0, \dots, n$ によって以下のように定義される:

$$\begin{aligned} q_s(u, v) = & \exp(\hat{v}_s(u, v) \beta_s(u, v)) \\ = & \cos(\beta_s(u, v)) + \\ & \hat{v}_s(u, v) \sin(\beta_s(u, v)). \end{aligned} \quad (65)$$

ここで,

$$\hat{v}_s(u, v) = (0, 0, \cos(\alpha_s(u, v)), \sin(\alpha_s(u, v))), \quad (66)$$

$$\alpha_s(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_{m,i}(u) B_{n,j}(v) \alpha_{si,j}, \quad (67)$$

$$\beta_s(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_{m,i}(u) B_{n,j}(v) \beta_{si,j}. \quad (68)$$

$s = 0$ と $s = l_s$ における s 方向の 1 次微分: $s(0, t)$ と $s(l_s, t)$ は,

$$\begin{aligned} s(0, t) = & \exp(\hat{v}_s(0, v) \beta_s(0, v)) \\ s(l_s, t) = & \exp(\hat{v}_s(1, v) \beta_s(1, v)) \end{aligned} \quad (69)$$

である。 $t_0(t) = t(0, t)$ とすると, $t = 0$ と $t = l_t$ に

おける t 方向の 1 次微分: $\mathbf{t}(s, 0)$ と $\mathbf{t}(s, l_t)$ は,

$$\mathbf{t}(s, 0) = \mathbf{t}_0(0) + \int_0^s \frac{\partial \mathbf{s}(s, 0)}{\partial t} ds, \quad (70)$$

$$\mathbf{t}(s, l_t) = \mathbf{t}_0(l_t) + \int_0^s \frac{\partial \mathbf{s}(s, l_t)}{\partial t} ds \quad (71)$$

である. ここで,

$$\frac{\partial \mathbf{s}(s, 0)}{\partial t} = \frac{1}{l_t} q_s(u, 0) [\omega_s(u, 0), \hat{\mathbf{v}}_0] q_s^{-1}(u, 0), \quad (72)$$

$$\frac{\partial \mathbf{s}(s, l_t)}{\partial t} = \frac{1}{l_t} q_s(u, 1) [\omega_s(u, 1), \hat{\mathbf{v}}_0] q_s^{-1}(u, 1). \quad (73)$$

さらに,

$$\begin{aligned} \omega_s(u, 0) = & \frac{n}{2} (0, -\sin^2(\beta_s(u, 0)), -\sin(\alpha_s(u, 0)), \\ & \cos(\alpha_s(u, 0))) \times \\ & \sin(2\beta_s(u, 0)) \sum_{i=0}^m (\alpha_{si,1} - \alpha_{si,0}) + \\ & n(0, 0, \cos(\beta_s(u, 0)), \sin(\beta_s(u, 0))) \\ & \sum_{i=0}^m (\beta_{si,1} - \beta_{si,0}), \quad (74) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_s(u, 1) = & \frac{n}{2} (0, -\sin^2(\beta_s(u, 1)), -\sin(\alpha_s(u, 1)), \\ & \cos(\alpha_s(u, 1))) \times \\ & \sin(2\beta_s(u, 1)) n \sum_{i=0}^m (\alpha_{si,1} - \alpha_{si,0}) + \\ & n(0, 0, \cos(\beta_s(u, 0)), \sin(\beta_s(u, 0))) \end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^m (\beta_{si,n} - \beta_{si,n-1}), \quad (75)$$

$$\alpha_s(u, 0) = \sum_{i=0}^m B_{n,i}(u) \alpha_{si,0}, \quad (76)$$

$$\beta_s(u, 0) = \sum_{i=0}^m B_{n,i}(u) \alpha_{si,0}, \quad (77)$$

$$\alpha_s(u, 1) = \sum_{i=0}^m B_{n,i}(u) \alpha_{si,n}, \quad (78)$$

$$\beta_s(u, 1) = \sum_{i=0}^m B_{n,i}(u) \alpha_{si,n}. \quad (79)$$

(平成 10 年 9 月 2 日受付)

(平成 11 年 12 月 2 日採録)



三浦憲二郎 (正会員)

昭和 34 年生. 昭和 57 年東京大学工学部精密機械工学科卒業. 昭和 59 年同大学院修士課程修了. 同年, キヤノン(株)入社. 機械系 CAD/CAM システムの開発に従事. 平成 3 年

コーネル大学機械工学科博士課程修了. 平成 5 年会津大学コンピュータ理工学部コンピュータソフトウェア学科助教授. 平成 9 年静岡大学工学部機械工学科助教授. Ph.D. 曲線・曲面の設計, CAD/CAM, 要素自動分割, マイクロマシン等に興味を持つ. ACM, ASME 各会員.