SATに対する陰的列挙法とDavis-Putnamの方法の関係について

7A−6

大柳 俊夫　　山本 雅人　　大内 東

(北海道大学)

1 はじめに

命題論理の充足可能性問題(SAT)は, 情報処理の分野における基本的な問題の一つで, 現在まで多くの研究が行われている. 最近になって著者らは, 0-1整数計画法の解法の一つである, 陰的列挙法に基づくSATアルゴリズムを提案している[1]. その方法は, SATを0-1整数計画問題として定式化した場合の特徴を利用して, 陰的列挙法をSAT向きに見直したものであり, 計算機実験の結果, 良好な結果を得ている.

本稿では, 陰的列挙法に基づくSATアルゴリズムとSATに対する古典的な方法であるDavis-Putnamの方法を比較検討し, 両者の関係を明らかにする. そしてその結果に基づき, 陰的列挙法に基づくSATアルゴリズムを改良した方法を提案し, その有効性を計算機実験により示す.

2 陰的列挙法に基づくSATアルゴリズムの概要

節形式のSATは, 0-1整数計画問題

$$\begin{array}{ll} \min & x_0 \\ \text{sub.to} & x_0\mathbf{e} + \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \\ & x_0 \in \{0,1\}, \mathbf{x} \in \{0,1\}^n \end{array} \tag{1}$$

として定式化できる. なお記号, 用語は文献[1]による.

SATの充足可能性は, (1)式の実行可能解を1つみつけることにより判定できる. したがって, SATを解く目的では(1)式の問題の最適解を求める必要はないことになる. 以下, 実行可能解の探索で用いる定理および系を示す. また, 図1に陰的列挙法に基づくSATアルゴリズム(IE-SAT)を示す.

[定理1] 部分問題P_kにおいて, $b_i^k \leq 0, \forall i \in M$ なら, 部分解$\mathbf{x}^k$の0完備解は,$x_0 = 0$となる実行可能解である.

[定理2] 部分問題P_kにおいて, $s_i < 0$となる$i \in M$が存在すれば, $\mathbf{x}^k$の完備解の中に,$x_0 = 0$となる実行可能解は存在しない. ただし,

$$s_i = \sum_{j \in N - J^k} \max\{0, a_{ij}\} - b_i^k, \tag{2}$$

である.

[定理3] $\bar{\mathbf{x}}^k$を,$x_0 = 0$となる実行可能な$\mathbf{x}^k$の完備解とする. このとき, $i \in R, h \in N - J^k$に対し, $a_{ih} = 1$ならば$\bar{x}_h^k = 1, a_{ih} = -1$ならば$\bar{x}_h^k = 0$でなくてはならない. ただし,

$$R = \{i \in M | s_i = 0\}, \tag{3}$$

である.

[系4] $\mathbf{x}^k$の完備解で, $x_0 = 0$となる実行可能解は, $x_j = 1, \forall j \in Q_+^k$; $x_j = 0, \forall j \in Q_-^k$をみたさなくてはならない. したがって,

---

On Relation between IE-SAT and DP
Toshio OHYANAGI, Masahito YAMAMOTO
and Azuma OHUCHI
Hokkaido University

```
S1:  k←1;
S2:  Pk← 元問題;
S3:  部分問題の集合 P ← φ;
S4:  while (Pkの0完備解が実行可能でない([定理1])) do begin
S5:    if (Pkに実行可能解存在の可能性がある([定理2],[系4])) then
S6:      if (値の固定が必要な自由変数が存在する([定理3])) then
S7:        P ← P ∪ {部分解にそれらの変数を加えた部分問題}
S8:      else begin
S9:        自由変数を1つ選択する(yとする);
S10:       P ← P ∪ {y = 0を部分解に加た部分問題}
                 ∪ {y = 1を部分解に加た部分問題}
S11:     end;
S12:   if (P ≠ φ) then begin
S13:     k← k + 1;
S14:     Pより部分問題Pkを1つ選択し, P ← P - {Pk}とする
S15:   end else
S16:     SATは充足不能と判定され終了
S17:end;
S18:SATは充足可能と判定され終了
```

図1 陰的列挙法に基づくSATアルゴリズム.
Fig.1 Implicit Enumeration based SAT algorithm.

$Q_+^k \cap Q_-^k \neq \phi$ ならば$\mathbf{x}^k$の完備解で実行可能なものは存在しない. ただし,

$$\begin{aligned} Q_+^k &= \{h \in N - J^k | a_{ih} = 1, i \in R\}, \\ Q_-^k &= \{h \in N - J^k | a_{ih} = -1, i \in R\}, \end{aligned} \tag{4}$$

である.

3. Davis-Putnamの方法の概要

Davis-Putnamの方法(以下,DPと呼ぶ)は, 節形式のSATに対する記号的方法の代表的なものの1つである. そのアルゴリズムは, 大きく4つの規則, トートロジー規則, 1-リテラル規則, 純-リテラル規則, 分割規則から構成されている. 以下, 各規則を簡単にまとめる. なお記号, 用語は, 文献[2]による.

1. トートロジー規則: トートロジーである基礎節を節集合Sから取り除いてS'を作る. S'が空なら,Sは充足される. さもなければ, S'に以下の規則を適用する.

2. 1-リテラル規則: 単位基礎節LがS中にあれば, SからLを含むすべての基礎節を取り除いてS'を作る.S'が空なら,Sは充足される. さもなければ, S'から$\neg L$を消去してS''を作る. もし,$\neg L$が単位基礎節としてSに含まれていれば, $\neg L$が消去されるからその節は空節となり, Sは充足不可能となる. さもなければ, S''に1.〜4.の規則を適用する.

3. 純-リテラル規則: S中のリテラルLが純リテラルであれば, SからLを含むすべての基礎節を取り除いてS'を作る. S'が

表1　数値実験結果 1.
Table 1 Computational results 1.

問題			時間(s)	
リテラル数	節数	T	IE-SAT	IE-SAT2
30	50	5	0.010	0.003
	100	5	0.027	0.001
	150	5	0.160	0.093
	200	5	0.087	0.063
50	100	5	0.030	0.017
	150	5	0.040	0.017
	200	5	0.380	0.190
	250	0	1.103	0.603
70	150	5	0.050	0.017
	200	5	0.230	0.077
	250	5	0.647	0.337
	300	2	21.096	9.290

表2　数値実験結果 2.
Table 2 Computational results 2.

問題			時間(s)		
リテラル数	節数	L	Kamath	IE-SAT	IE-SAT2
200	400	7	3.5	0.29	0.04
400	800	10	5.6	0.35	0.04
400	800	7	7.8	1.91	0.14
500	1000	10	7.4	0.59	0.06
1000	2000	10	18.5	6.70	0.43
1000	2000	7	21.5	13.73	0.81
1000	2000	3	50.4	8.55	0.97
1000	4000	10	25.1	27.15	1.33
1000	8000	10	38.0	74.23	3.09
1000	16000	10	66.4	149.27	6.78
1000	32000	10	232.4	309.04	14.14

空なら,Sは充足される. さもなければ, S'に 1.〜4. の規則を適用する.

4. 分割規則：A_i, B_i, Rが$L, \neg L$を含まないで, 節集合Sが$S = (A_1 \vee L) \wedge \cdots \wedge (A_m \vee L) \wedge (B_1 \vee \neg L) \wedge \cdots \wedge (B_n \vee \neg L) \wedge R$の形式でかけるとき, $S_1 = A_1 \wedge \cdots \wedge A_m \wedge R$と$S_2 = B_1 \wedge \cdots \wedge B_n \wedge R$に分ける. すると, Sが充足不可能であることと, S_1とS_2がともに充足不可能であることが同値となるので, S_1とS_2それぞれに 1.〜4. の規則を適用する.

4. IE-SAT と DP の関係

IE-SAT と DP の両者を比較検討した結果をまとめると以下のようになる.

1. IE-SAT の定理 1 に基づく 0-完備解の実行可能性の検査は, DP では行われない.
2. IE-SAT では, DP のトートロジー規則と純-リテラル規則は取り入れられていない.
3. IE-SAT の定理 2, 定理 3, 系 4 に基づく処理は, 1-リテラル規則とほぼ同様であり, 以下の点で異なる.
   (a) Sから単位節を取り除かない.
   (b) 単位節の処理をまとめて行う.
4. DP の分割規則は, IE-SAT の S9 および S10 の部分問題の生成と同じである.

5 IE-SAT の改良

5.1 改良の要点

前章で述べた両者の関係の 3. をもとに IE-SAT を改良した. 改良の要点は,

1. ある部分解で満足される制約式は, その部分解の測深では取り除く.
2. 各制約式中で値の固定されていない変数のうち, 係数が 1 である変数の個数を, 部分解の測深の各ステップでカウントしておく.

である.

まず 1. により, ある制約式が$s_i = 0$であれば, またその時に限り, その制約式が単位節に対応することになり, 一般に集合Rは小さくなる. このため, 図 1 の S5 および S6 の計算の効率化がはかれる. また 2. により, s_iの計算の効率化がはかれる.

5.2 計算機実験および結果

文献 [1] の問題を用いて, IE-SAT とそれを改良した方法 (IE-SAT2) の比較実験を行った. なお実験では, Sun SPARC Station ELC を用いた. 結果を表 1 と表 2 に示す. 表中の値は, 計算時間の平均値である. この結果, サイズの小さい問題 (表 1) に対しても IE-SAT2 は IE-SAT に比べてすべての問題を 1.2〜3 倍程度高速に解いていることがわかる. また, サイズの大きな問題 (表 2) に対しては, 10 倍以上高速に解いていることがわかる. 以上の結果より, IE-SAT2 で行った改良は有効であると考えられる. また, 表 2 に示した Kamath らの結果 [3] と比較しても,IE-SAT2 は 10 倍以上高速に解いていることがわかる.

6 おわりに

本稿では, 陰的列挙法に基づく SAT アルゴリズムと Davis-Putnam の方法の関係を明らかにした. そしてその結果に基づき, 陰的列挙法に基づく SAT アルゴリズムを改良する方法を提案し, その有効性を計算機実験により示した.

参考文献

[1] 大柳, 大内： 論理的推論問題に対する数理計画法の適用, 第 4 回 *RAMP* シンポジウム論文集, pp.175-183, 1992.

[2] C. Chang and R. C. Lee: *Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving*, Academic Press, Orland, 1973.

[3] A. P. Kamath, N. K. Karmarkar, K. G. Ramakrishman and M. G. C. Resende: Computational Experience with an Interior Point Algorithm on Satisfiability Problem, *Annals of Operations Research*, Vol.25 (1990), 43-58.