閉曲面に対する胞体貼り合わせのインタフェース

9K−7

高橋 成雄　品川 嘉久　國井 利泰
東京大学

1 はじめに

本論文では、先に提案された閉曲面に対する位相グラフのアイコン表示法 [2] に対し、そのインタフェースを構築する。閉曲面は、特異点 に 1 対 1 に対応する胞体に分割することができる。ここでは、高さ関数というある一定の方向を設定し、その方向に胞体を貼り合わせて閉曲面を作ることを仮定する。ユーザは、特異点に対する胞体の種類を選び、それをどのように貼り合わせるかを指定することになる。インタフェースは、不正な胞体の貼り合わせを拒否し、正しい曲面構築へとユーザを導く。アイコン表示にはグリッドを用い、アイコンを適当に拡大することにより、その位相構造を視覚化する。簡単な UNDO ・ REDO 処理も実現する。

2 モース理論による曲面の符合化

まず、対象としている曲面を 2 次元のコンパクトで滑らかな多様体であるとし、その多様体から実数への関数 $f: \boldsymbol{R}^2 \rightarrow \boldsymbol{R}$ を考え、その値を $f(x,y)$ とする。ある点 p において $\frac{\partial f}{\partial x}=0,\ \ \frac{\partial f}{\partial y}=0$ である時、その点を特異点といい、その時の f の値を特異値という。また、その点におけるヘッセ行列が正則でない時、その特異点は退化しているという。さらに、非退化の時のヘッセ行列の負の固有値の数を、その特異点での指数という。

もし、f のすべての特異点が非退化であり、そのそれぞれの特異値が異なる場合、f はモース関数と呼ばれる。モース理論は、次のことを教えてくれる [1]。f がモース関数である時、f のそれぞれの特異点の指数を $r_1, r_2, \ldots r_n$ とすると、曲面は $e^{r_1} \cup e^{r_2} \cup \ldots \cup e^{r_n}$ にホモトピー同値である。ここで、e^k とあるのは k 次元胞体であり、k 次元円板に同相なものをいう。具体的には、頂上は 2 次元胞体に、谷底は 0 次元胞体に、峠は 1 次元胞体に対応する。

ここで、モース関数として高さ関数を採ると、その高さ関数に従って特異点を走査することにより、曲面を構築することができる。つまり、特異点に対応する次元の胞体を貼り合わせることによって、曲面の位相構造が記述できるのである。

しかし、モース理論だけでは胞体の次元わかるが、その貼り合わせ方は記述できない。品川ら [2] は、これをレーブグラフと呼ばれる位相グラフのアイコン表示を用いて、符合化することに成功している。レーブグラフとは、同じ f の値を持ちさらに連結であるという同値関係よって、商集合をとったものである。図 1 は、トーラスとそのレーブグラフを示している。モース関数の特異値でない実数値の逆像は、円周に同相なものの集まりとなる。そこで、特異値のおける逆像の変化を記述することで、位相構造の変化を記述することができるのである。以下、この高さ関数の逆像を輪郭線と呼ぶことにする。輪郭線はそれぞれ番号が付けられ、それらの包含関係に対応して、仮想的な輪郭線 #0 を根に持つ木構造で表すことにする。

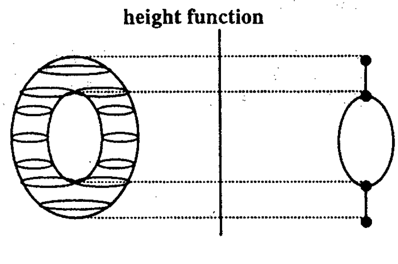

図 1: トーラスとそのレーブグラフ

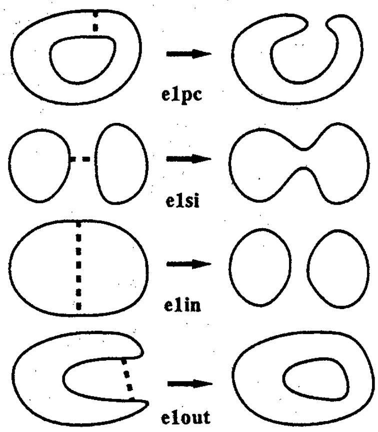

図 2: 1 次元胞体の貼り合わせ方の分類

輪郭線の変化は、その胞体の次元によって次のように分類できる。

- 頂上 (2 次元胞体)
  新しい輪郭線が 1 つ生成されることに相当する。以下この場合を **e2** と呼ぶ。
- 谷底 (0 次元胞体)
  輪郭線が 1 つ消滅することに相当する。以下この場合を **e0** と呼ぶ。
- 峠 (1 次元胞体)
  この場合、さらに次の 4 つの場合に分けることができる (図 2 参照)。
  - 親子関係にあるふたつの輪郭線を合併する場合。以下 **e1pc**(e1 parent-child) と呼ぶ。
  - 兄弟関係にあるふたつの輪郭線を合併する場合。以下 **e1si**(e1 sibling) と呼ぶ。
  - ひとつの輪郭線を内側から分割する場合。以下 **e1in**(e1 inside) と呼ぶ。
  - ひとつの輪郭線を外側から分割する場合。以下 **e1out**(e1 outside) と呼ぶ。

本論文は、このアイコン表示のインターフェースを構築することを目的とする。

An interface for cell gluing operations of closed surfaces
Shigeo TAKAHASHI, Yoshihisa SHINAGAWA, and Tosiyasu L. KUNII
The University of Tokyo

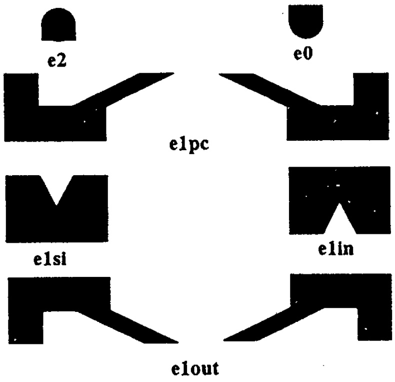

図 3: アイコンの基本形

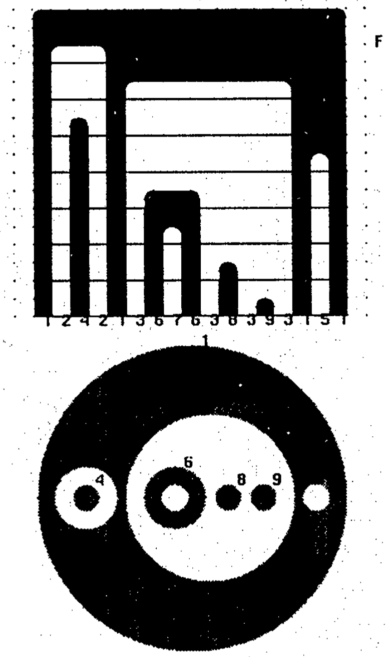

図 4: アイコン表示とその輪郭線の例

3 インタフェースの実現

アイコン表示に関しては、基本的に品川ら [2] が提案したものを用いる。表示には、小さ過ぎてわかりにくくならないよう、最小単位としてグリッドを用いる。最初は基本サイズでアイコンを表示し、必要に応じ適宜アイコンのサイズを横に拡大することで、曲面の位相構造の視覚化を実現する。図 3 は、我々が用いたアイコンの基本形である。アイコンは、中身の詰まっている solid の部分を黒塗りで、そうでない hollow の部分を白抜きで表す。

ユーザは、高さ関数方向に特異点に対応する種類のアイコンを貼り合わせることで、曲面を構築することになる。ユーザは、まず胞体の種類を選択する。そして、その胞体をどのように貼り付けるかを記述することになる。システムは、正しい胞体の貼り合わせの候補だけを表示するようにして、不正な曲面構築を排除する。

以下、それぞれの場合について具体的に見ていく。ここでは、図 4 にアイコンを貼り合わせる場合を考える。

- solid **e2** の場合、#0, #2, #3, #5, #7 の輪郭線の中に新しい輪郭線を作ることができる。
- solid **e0** の場合、#4, #8, #9 の輪郭線を閉じることができる。#6 は、中に輪郭線を含んでいるので閉じることできず、システムが自動的に候補から取り除く。
- solid **e1pc** の場合、ふたつの段階を踏む。まず、親の輪郭線の候補として #1, #6 のどちらかを選ぶことができる。例として #1 を選んだ場合、さらに子の輪郭線として #2, #3, #5 を選ぶことができる。
- solid **e1si** の場合、#6 と #8, #6 と #9, #8 と #9 を選ぶことができる。
- solid **e1in** の場合、ふたつの段階を踏む。まず、分割する輪郭線の候補として #1, #4, #6, #8, #9 を選ぶことができる。例として #1 を選んだ場合、子の輪郭線の分け方として #2, #3, #5 をどのように分けるかを記述する。
- solid **e1out** の場合、ふたつの段階を踏む。まず、分割する輪郭線の候補として #1, #4, #6, #8, #9 を選ぶことができる。例として #8 を選んだ場合、兄弟の輪郭線の分け方として #6, #9 をどのように分けるかを記述する。

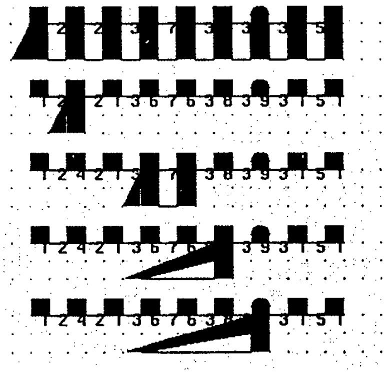

図 5: **e1out** の第 1 段階の選択

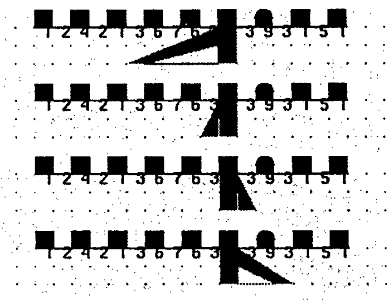

図 6: **e1out** の第 2 段階の選択

例として、上記の **e1out** の例をシステムにおける選択の例を図 5, 6 に掲げる。

簡単な UNDO ・ REDO 処理も、胞体貼り合わせの履歴をリスト構造に格納することで実現した。

4 結論

本論文では、閉曲面に対する胞体貼り合わせのインタフェースの実現法について述べた。これにより、ユーザは曲面の位相構造記述することができ、さらに幾何情報を付加する際の礎となる。

参考文献

[1] J. Milnor, *Morse Theory*. Princeton University Press, New Jersey, 1963.

[2] Y. Shinagawa, Y. L. Kergosien, and T. L. Kunii, "Surface Coding Based on Morse Theory," *IEEE Computer Graphics and Applications*, vol. 11, Sept. 1991, pp. 66–78.