ホモトピーモデルを用いた地形の記述法

9K-6

池田 哲也、 國井 利泰

東京大学

1 はじめに

地図のように複雑な等高線の集合から成る物体を記述するための手法を提案する。この手法はホモトピーモデルによる立体再構成を用いている。ホモトピーモデルは元来、複雑な位相的構造を持つ立体を再構成するために提案されたものであるが、その一構成物であるトロイダルグラフによって複雑な等高線に対応することが出来る。

ここでは、尾根線や谷線の流れなどの多くの等高線間にまたがる特徴を考慮に入れるため、トロイダルグラフを、二つの等高線間の関係のみならず三つ以上の等高線間の関係を表現できるよう、また特異点付近における等高線の分岐、融合をも扱えるように拡張する。

2 導入

2.1 ホモトピーモデル

本論文で提案される記述法は、ホモトピーモデル [4] による立体再構成を用いることを仮定している。この手法は三角形パッチに代表される、断面の集合から立体表面を再構成する手法を一般化したものであり、ホモトピーという概念によって連続変形を導入することにより、三角形パッチに見られる様々な問題点を解決した。

ホモトピーモデルは、レーブグラフによる位相情報の記述、ホモトピー関数による断面間の補間、連続的トロイダルグラフによるパラメータ間の関係の記述、の三つの部分に分けられる。これらの詳細については、参考文献 [4] を参照されたい。

簡単に説明しておくと、レーブグラフとは立体の表面の点に定義される一価の連続関数 (高さ関数と思えばよい) による商写像で、特異点 (頂上点、谷底点、鞍点) がノードとなるグラフで表現される。ホモトピー関数は、互いに同相な断面間に定義され、それぞれの断面上のパラメータの他に、もう一つパラメータを付加することによって、断面間の連続変形を記述する関数である。また、トロイダルグラフとは、ホモトピー関数を定義する際にそれぞれの断面上のパラメータ間の関係を制御する非減少関数 (あるいはその関数を表現するグラフ) である。

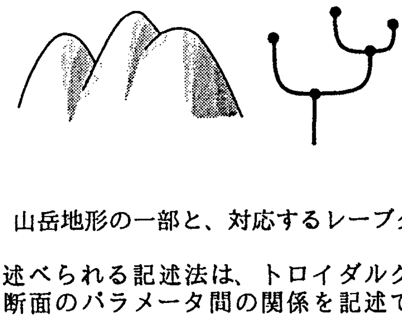

図 1: 山岳地形の一部と、対応するレーブグラフ

本稿で述べられる記述法は、トロイダルグラフを三つ以上の断面のパラメータ間の関係を記述できるように拡張した、多重トロイダルグラフ (Multiple Toroidal Graph, 以下 MTG と略すこともある)[2] を用いて、多くの等高線にまたがる特徴 (尾根線、谷線など) を利用した再構成方を可能にする。また、多重トロイダルグラフはレーブグラフと密接な関係があり、特異点付近での等高線の分岐、合流、発生、消滅を反映した構造をとる。

2.2 地形データ

地形データは一般に、地形図に見られるような等高線の集合で表される場合と、国土地理院発行の国土数値情報に見られるようなメッシュ構造で表現されるものがある。

等高線の集合を扱ったものは、三角形パッチを用いて立体再構成をするものがほとんどである [1]。地形に特異点が含まれている場合の取り扱いは、双峰山岳形状のように比較的単純な場合に対して試みられているもの [5] がある程度である。

一方、メッシュ構造で表現された地形データは、格子点毎にその近傍から特異点や、尾根、谷などにクラス分けする研究が多くなされている [3]。

本稿では位相構造を反映した記述法を目指しているので、地形データは現時点では位相情報を得やすいメッシュ構造で表現されたものの方が望ましい。この場合、ホモトピーモデルを用いるためにメッシュ構造から等高線への変換の処理が必要となる。特異点の位置とその間の関係がすべて推定できるという条件つきで、等高線を使うことももちろんできる。

3 多重トロイダルグラフ

多重トロイダルグラフは、互いに同相な複数の等高線の間に定義される[1]このことは、レーブグラフにおけるエッジのそれぞれに対応して多重トロイダルグラフが定義されることを意味している。

この節では、等高線はすべて互いに同相なものとし、それらは $f_1(s_1),\cdots,f_N(s_N)$ のようにパラメータ化されているものとする。また、$f_i(s_i)$ と $f_{i+1}(s_{i+1})$ のパラメータ間の関係が、非減少関数 U_i を使って $s_{i+1} = U_i(s_i)$ と書けるとする $(i=1,\cdots,N-1)$。

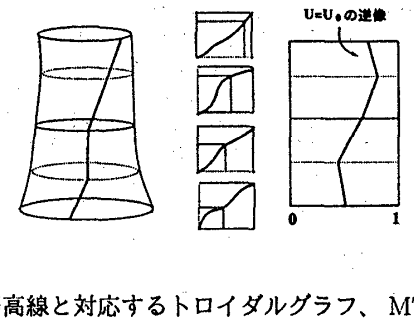

図 2: 等高線と対応するトロイダルグラフ、MTG の例

[1] 多重トロイダルグラフの中で等高線は必ずしも平面曲線である必要はない。

A Description of Topography Based on the Homotopy Model
Tetsuya Ikeda and Tosiyasu L. Kunii
The University of Tokyo

このとき、多重トロイダルグラフは次のように定義される:

関数 $f : [0,1] \times \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R}^2$ があって、$f(s,h_i) = f_i(s)$ $(\forall s \in [0,1], i = 1,\cdots,N)$ を満たすとする。また、関数 $U : [0,1] \times \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R}^2$ があって、$U(s,h_1) = s$ かつ $U(s,h_j) = U_1^{-1}(U_1^{-1}(\cdots(U_{j-1}^{-1}(s))\cdots))$ $(\forall s \in [0,1], j = 2,\cdots,N)$ を満たすとする。このとき、これら関数のペア (f,U) を等高線 $f_1,\cdots,f_N$ の多重トロイダルグラフ、またはMTGと呼ぶ。また、f,U の定義域 $[0,1] \times [h_1,h_N]$ をMTGシートと呼ぶことにする。

ホモトピーモデルによる補間は、MTGシートのうち直線 $h = h_i$ $(i = 1,\cdots,N)$ 上での値のみが与えられている関数 f の、それ以外の点での値をホモトピー関数によって補間することに他ならない。このとき、最初に値が与えられている点がMTGシート上で直線になっている必要はない。すなわち、対象となる物体の表面上で、補間の元になる点は必ずしも等高線上に並んでいる必要はない。ただし、互いに同相であり、互いに交わっていてはならない。

4 特異点付近の取り扱い

前節での定義は、等高線がすべて互いに同相であるという仮定の下でおこなわれた。しかし、実際の地形では頂上点、谷底点、鞍点(峠)が存在し、その上下で等高線が消滅、生成、分岐(合流)する。本稿ではこの等高線の位相変化を、MTGシート同士の接続を規定することによって記述する。

ここでは、簡単な頂上点、谷底点の取り扱いについては[2]に譲り、鞍点のみについて述べることにする。

一般的に地形は $z = F(x,y)$ の形に書ける。このような場合、鞍点の上下での等高線の分岐、合流は、図3に示した四種類に分けられる。

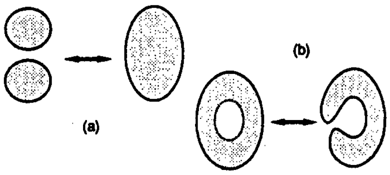

図 3: 鞍点付近での等高線の分岐、合流

これらのうち最も単純な場合、すなわち双峰山の場合のMTGシートの接続について述べる。この場合、鞍点の下では等高線は一つ、上では二つである。鞍点を通る等高線を考えると、一周する間に鞍点を二度数えると等高線は一つに、一度づつしか数えないようにすると、等高線は二つと見なせる。従って、鞍点より下の等高線に対応するMTGシートでは、鞍点は二つの別な点として現れ、鞍点より上の等高線に対するMTGシートでは、一つしか現れない。(等高線は閉曲線であるので、$s = 0$ と $s = 1$ の点は同一の点を指すことに注意。)

この時、上のMTGシートと下のMTGシートで関数 f,U が連続になるように変換規則を決めなければならない。この変換規則を単純にするために、下のMTGシートでは鞍点は必ず $s = 0 (s = 1), s = 0.5$ の位置にあるとし、上のMTGシートでは必ず $s = 0 (s = 1)$ の位置にあるものとする。これは関数 U を適当に定めることによって可能である。このような条件下でMTGシートの接続は、図4のような単純な形で定まる。その他の分岐、合流も、同様に定まる。

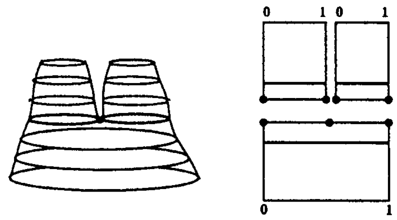

図 4: 鞍点付近での MTG シートの接続の例

5 結論

ホモトピーモデルによって地形のような複雑な等高線を持った立体を再構成する際に、尾根線、谷線のように多くの等高線にまたがった特徴を考慮した補間を可能にするデータの記述法を提案した。

さらに、本稿で述べられた記述法を用いることによって、頂上、谷底、峠といった位相的情報を保持することができることを示した。

参考文献

[1] H. N. Christiansen and T. W. Sederberg. "Conversion of complex contour line definitions into polygonal elemet mosaics". *Computer Graphics (SIGGRAPH '78 proc.)*, Vol. 12, pp. 187–192, 1978.

[2] T. Ikeda, T. L. Kunii, Y. Shinagawa, and M. Ueda. "A Geographical Database System Based on the Homotopy Model". In T. L. Kunii and Y. Shinagawa, editors, *Modern Geometric Computing for Visualization*, pp. 193–206. Springer-Verlag, 1992.

[3] T. K. Peucker and D. H. Douglas. "Detection of Surface-Specific Points by Local Parallel Processing of Discrete Terrain Elevation Data". *Computer Graphics and Image Processing*, Vol. 4, pp. 375–387, 1975.

[4] Y. Shinagawa and T. L. Kunii. "The Homotopy Model: A Generalized Model for Smooth Surface Generation from Cross Sectional Data". *The Visual Computer*, Vol. 7, No. 2-3,, 1991.

[5] 安居院 猛, 長 敬三, 中嶋正之. "等高線からの双峰山岳形状の自動再生法". 信学論 *(D)*, Vol. J71-D, No. 5,, 1988.