

自由曲線・曲面の特異点回避分割数計算方式

9K-2

川崎敏治†, 酒井原徹†, 桑名利幸‡

日立製作所 †マイクロエレクトロニクス機器開発研究所, ‡大みか工場

1. はじめに

従来, 自由曲線・曲面表示において, 画面上での精度を保つように折線・多面体近似する適応分割方式があった. この方式では, 何分割すれば良いか計算する処理(分割数計算), 折線・多面体データ作成処理, 折線・多面体表示処理の三段階に分けられる. 特に, 分割数計算は, 後の二処理の処理量を定め, 表示性能に大きく関与する.

分割数計算方式として, Filip¹⁾, Abi-Ezzi²⁾ による方式, Rockwood³⁾ による方式, 等がある. これらを有理 Bézier 曲線・曲面に適用する場合, 制御点のウェイトは総て正(又は負)でなければならない. しかし, 視点と制御点の一つが一致する場合など, ウェイトが0になることがある. このとき, 計算式中にゼロ割りが起こり, 分割数は不定となる.

本論文では, ウェイトが0の部分と0でない部分とに分け, 別々に計算を行うことによって, ゼロ割りを回避する分割数計算方式を提案し, その有効性を示す.

2. 有理 Bézier 曲線・曲面

有理 Bézier 曲線 c は, ウェイトを第4番目の座標として持つ同次座標で与えられた制御点の集合 $\{(P_i, w_i) | 0 \leq i \leq K\}$ に対して (2.1) で定義される. 又, 曲面も同様に定義される.

$$c(t) = \frac{\sum_{i=0}^K P_i B_i^K(t)}{\sum_{i=0}^K w_i B_i^K(t)}, \quad B_i^K(t) = \binom{K}{i} t^i (1-t)^{K-i} \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (2.1)$$

3. 従来方式

以下, 簡単のため, 有理 Bézier 曲線で考える. 又, 画面上の精度を規定する方法は, 折線近似と曲線との偏差を一定値以下に抑える方法とする(図1).

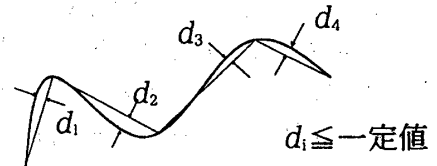


図1 偏差による方法

Filip は, C^2 級のパラメトリック曲線 $c: [a, b] \rightarrow R^n$ の偏差の上限計算式を求めた¹⁾. 又, Abi-Ezzi は, この結果を用いて, 規定精度 = TOL としたときの曲線 (2.1) の分割数計算式

$$\text{分割数} = \sqrt{\frac{\max_{0 \leq i, j, k \leq K} \left\| \frac{A_{ijk}}{w_i w_j w_k} \right\|}{8 \cdot \text{TOL}}}, \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} A_{ijk} = & [(K-i)(K-i-1)\{(P_{i+2}-2P_{i+1}+P_i)w_j - (w_{i+2}-2w_{i+1}+w_i)P_j\} + 2i(K-i)\{(P_{i+1}-2P_i+P_{i-1})w_j - (w_{i+1}-2w_i+w_{i-1})P_j\} \\ & + i(i-1)\{(P_i-2P_{i-1}+P_{i-2})w_j - (w_i-2w_{i-1}+w_{i-2})P_j\}]w_k \\ & - 2[(K-i)\{(P_{i+1}-P_i)w_j - (w_{i+1}-w_i)P_j\} + i\{(P_i-P_{i-1})w_j - (w_i-w_{i-1})P_j\}][(K-i)(w_{i+1}-w_i) + i(w_i-w_{i-1})], \end{aligned} \quad (3.2)$$

を求めた²⁾. (3.1) は, 総てのウェイトが正(又は負)のときのみ正しい²⁾. 特に, ウェイトに0のものがあれば, 分割数は不定となる.

4. 特異点回避分割数計算方式

本章では, ウェイトの符号は, 総て0以上であると仮定する.

Division Method to Evade Singular Points for Free Curves and Surfaces

Toshiharu KAWASAKI†, Toru SAKAIBARA†, Toshiyuki KUWANA‡

†Microelectronics Products Development Laboratory and ‡Omika Works, Hitachi, Ltd.

従来方式は、分割数計算を、各制御点をウェイトで割った値のノルムの最大値を求める問題に帰着させている。そのため、ウェイトに0のものがあると、そこで無限大となる。

本方式では、まず、分母から0の項を取り除いても良いことに着目し、分子と分母の項と対応が付く部分と、付かない部分とに分解する。このとき、項の数は、8つになる。次に、三角不等式を用いてノルムの和に分ける。最後に、分母の一部又は総てを0でない分母の最小値で置き換えることによって、最後の式を得る。このように考えると、曲線(2.1)の分割数計算式は、

$$\text{分割数} = \sqrt{\frac{B_1+B_2+B_3+B_4+B_5+B_6+B_7+B_8}{8 \cdot \text{TOL}}}, \tag{4.1}$$

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \max_{w_i, w_j, w_k > 0} \left\| \frac{A_{ijk}}{w_i w_j w_k} \right\|, & B_2 &= \max_{\substack{w_i, w_j > 0 \\ w_k = 0}} \left\| \frac{A_{ijk}}{w_i w_j} \right\| \frac{1}{\min |w_k|}, \\ B_3 &= \max_{\substack{w_j, w_k > 0 \\ w_i = 0}} \left\| \frac{A_{ijk}}{w_j w_k} \right\| \frac{1}{\min |w_i|}, & B_4 &= \max_{\substack{w_i, w_k > 0 \\ w_j = 0}} \left\| \frac{A_{ijk}}{w_k w_i} \right\| \frac{1}{\min |w_j|}, \\ B_5 &= \max_{\substack{w_i > 0 \\ w_j = 0 \\ w_k = 0}} \left\| \frac{A_{ijk}}{w_i} \right\| \frac{1}{\min w_j^2}, & B_6 &= \max_{\substack{w_i = 0 \\ w_j > 0 \\ w_k = 0}} \left\| \frac{A_{ijk}}{w_j} \right\| \frac{1}{\min w_k^2}, \\ B_7 &= \max_{\substack{w_i = 0 \\ w_j = 0 \\ w_k > 0}} \left\| \frac{A_{ijk}}{w_k} \right\| \frac{1}{\min w_i^2}, & B_8 &= \max_{\substack{w_i = 0 \\ w_j = 0 \\ w_k = 0}} \|A_{ijk}\| \frac{1}{\min |w_i|^3}, \end{aligned} \right\} \tag{4.2}$$

となる。この考え方は、曲面や、更に、負符号のウェイトを含む場合にも適用できる。

5. 結 果

表1に、有理 Bézier 曲面の分割数を、代案として、0のウェイトを小さな値に置き換えて計算した場合と、本方式で計算した場合の比較結果を示す。分割数は、近似多面体の面数とし、過剰分割率は、その値が、真値の何倍かを表したものである。なお、表内の数値は、数例の測定結果の平均値である。

この結果より、ウェイトを充分小さな値で置き換える方法より、新方式の方が、格段に良い性能が得られ、又、分割数も、真値と比べてほぼ妥当な値であることが分かる。

表1 方式比較

		分割数	過剰分割率
本方式		3630.57	4.939
置換方式	ウェイト 0→0.0001	14712964096.00	20013747.572
	ウェイト 0→0.001	147013344.00	199979.279
	ウェイト 0→0.01	1458792.25	1984.366
真 値		735.14	—

6. おわりに

本論文で述べた特異点回避分割数計算方式は、計算式を分解して考えることで、ゼロ割りを回避する方式である。本論文では、有理 Bézier 曲線を例にしたが、本方式は、一般に、制御点によって定義され、有理多項式で表現される曲線・曲面に適用できる。

参考文献

- [1] D. Filip, R. Magedson and R. Markot, Surface algorithms using bounds on derivatives, Computer aided geometric design, 3 (1986), 295-311.
- [2] S. S. Abi-Ezzi, The graphical processing of B-splines in a highly dynamic environment, Ph. D. Thesis, RPI (1989). Rensselaer Design Research Center.
- [3] Rockwood, A generalized scanning technique for display of parametrically defined surfaces, IEEE CG&A (1987), 15-26.