3次元物体形状の符合化法

8K−6

品川 嘉久　國井 利泰　高橋 成雄
東京大学

1 はじめに

本論文では、3次元物体の形状を特異点を用いて符合化する方法について述べる。特異点はモース理論によって、その物体の位相的特徴と密接に関係している。物体形状は、特異点の指数と同じ次元を持つ胞体を張り合わせて構成できる。特異点間のグラフ的関係はレーブグラフを用いて記述する。この符合化法により、物体の位相を記号として操作することが可能になる。

2 レーブグラフと特異点

まず、3次元物体の表面を C^2 級の2次元可微分多様体と考える。平面、地球表面のような球面、ドーナッツの表面
(トーラスと呼ばれる)などは、多様体である。多様体には、局所座標系が定義されている(図1参照)。例えば、地球の経度・緯度などである。ただし、一個の局所座標系で覆えるとは限らない。球面の場合は、北半球を覆う局所座標系と南半球を覆う局所座標系の2枚を赤道でつなぎ合わせることになる。同様に、トーラスを覆うのには4枚必要である。二つ以上の座標の網の重なりの部分では、一方の座標の値から他方の座標値に変換してやる必要がある。その変換は微分可能なように行なえるようにする。これが可微分多様体と呼ばれるものである。

次に、この局所座標系の上で、高さ関数を定義する。高さ関数は、与えられた点の、高さ(物体が埋め込まれている3次元空間の中での)を返す関数である。さらに、レーブグラフを次のように定義する。レーブグラフは、物体表面を等高線で表し、各等高線の連結成分を一つの点として表して得られるグラフである。例えば、図2(a)に示すようなドーナツ型の曲面(トーラス)の等高線は図2(b)のようになり、そのレーブグラフは図2(c)のようになる。この図からもわかるように、レーブグラフは、その物体の「骨組み」を表す。

このレーブグラフで特に重要なのは、曲面の頂上、鞍点、谷底を表すノードである。これらの点は高さ関数の特異点と呼ばれる。高さ関数 $h : R^2 \to R$ のヤコビ行列は

$$J = \begin{pmatrix} \frac{h}{\partial x_1} \\ \frac{h}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

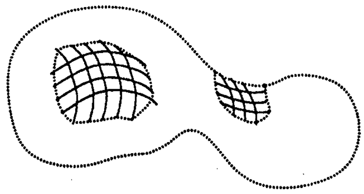

図 1: 多様体の局所座標系

で与えられ、特異点はこれが0ベクトルとなる点である。特異点は、次節で述べるように物体の位相的特徴と強い関連を持っている。特異点におけるヘッセ行列の負の固有値の数を、その特異点の指数と呼ぶ。高さ関数 $h : R^2 \to R$ のヘッセ行列は

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}$$

で与えられる。頂上を表す特異点は指数2、鞍点は1、谷底は0となる。トーラスの場合、指数2の臨界点は1個、指数1の臨界点は2個、指数0の臨界点は1個となっている。

3 レーブグラフとモース理論に基づく物体の符合化法

まず、物体の形を記号(符合)で表すことを考える。モース理論を用いると、大雑把に言えば、物体の形はその臨界点の指数と同じ次元を持つ胞体というものを張り合わせて復元できる。トーラスを例にとると、指数2の臨界点は1個、指数1の臨界点は2個、指数0の臨界点は1個あるから、モース理論によると、2次元胞体1個、1次元胞体2個、0次元胞体1個を張り合わせて得られる。図3にその様子を示す [1]。

物体形状の符合化はこの胞体およびその張り合わせの順序・位置を記述することによって行なう [2]。具体的には、2次元胞体を張り合わせる put_e2、1次元胞体を張り合わせる
put_e1_divide と put_e1_merge、0次元胞体を張り合わせる put_e0 の4種類のオペレータがある。例えば、先ほどのトーラスは、

1. $put\_e2(0)$
2. $put\_e1\_divide(1, INSIDE)$
3. $put\_e1\_merge(1, 2)$

A coding method for three-dimensional objects
Yoshihisa Shinagawa, Tosiyasu L. Kunii, and Shigeo Takahashi
The University of Tokyo

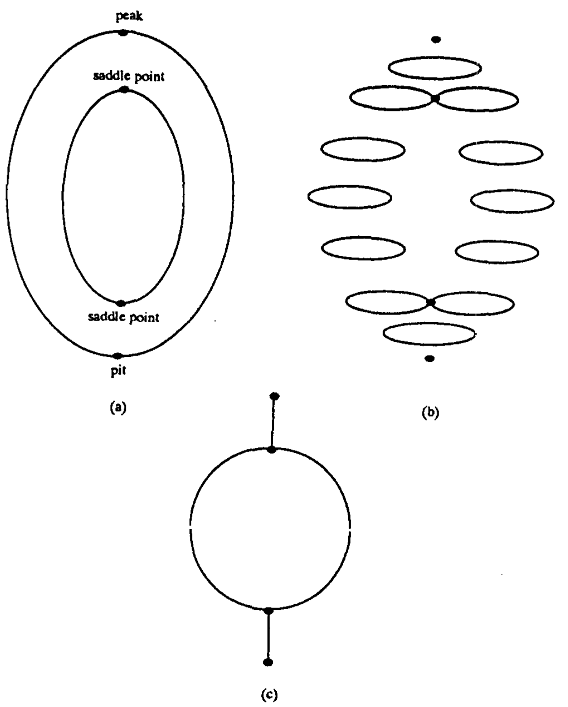

図 2: (a) トーラスとその臨界点、(b) 等高線、(c) そのレーブグラフ

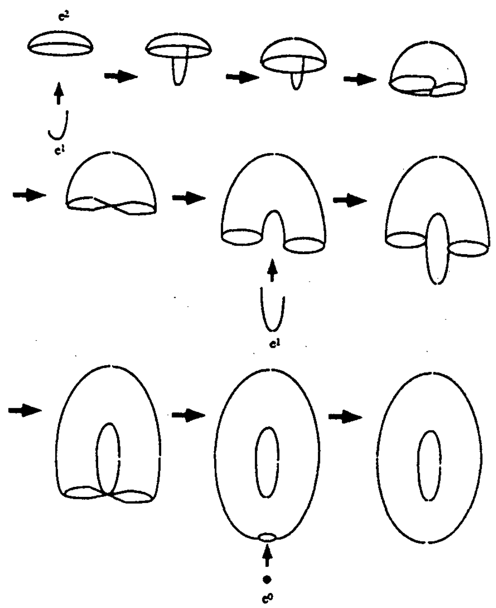

図 3: トーラスの胞体による構成

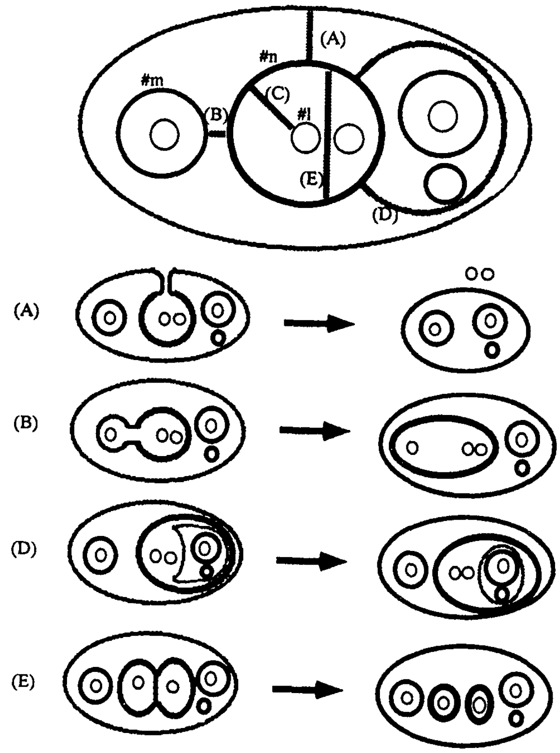

図 4: 1次元胞体の張りつけ方

4. *put_e*0(1)

という記号で表される。各オペレータのパラメタに現れる数字は、その高さでの物体の切口の輪郭線に与えられた番号である。各オペレータのパラメタについての説明は、[2] に譲る。1次元胞体の張りつけには、次のように4種類に分けられる（図4参照、AとCは本質的に同じ）。

胞体を張り合わせる順序は、レーブグラフによって示されている。この符合化法により、物体の位相を記号として操作することが可能になる。

謝辞

貴重な御意見を下さったパリ南大学の Yannick L. Kergosien 博士に感謝する。

参考文献

[1] Y. Shinagawa and T. L. Kunii. Using surface coding to detect errors in surface reconstruction. In T. L. Kunii and Y. Shinagawa, editors, *Modern Geometric Computing for Visualization*, pages 227–240. Springer-Verlag, 1992.

[2] Y. Shinagawa, Y. L. Kergosien, and T. L. Kunii. Surface coding based on Morse theory. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 11(5):66–78, September 1991.