二分決定グラフの最小推論について

1R−7

武永 康彦　矢島 脩三

京都大学工学部

1 はじめに

二分決定グラフ(BDD : Binary Decision Diagram)[1] は、論理関数の表現方法の一種である。二分決定グラフは、多くの実際的な関数を比較的小さなサイズで表現できる、標準形が存在して変数の順序を固定すると関数の表現が一意に定まる、という特長をもつ。そのため、論理設計検証、テスト生成、記号シミュレーションなどの分野のアプリケーションにおいて、論理関数の内部表現として広く利用されている。

本稿では、各変数の値とそれに対する論理関数の値をいくつか与えられたとき、それらを満たす、変数の順序づけの決められた二分決定グラフのうちで最小となるものを求める、二分決定グラフの最小推論問題がNP完全であることを示す。

2 二分決定グラフ

二分決定グラフ(BDD)[1] は、論理関数を表現する有向非循環グラフであり、ノードの集合は、変数ノードと定数ノードからなる。二分決定グラフは変数ノードを表す4つ組 $< i, x_i, low(i), high(i) >$ の集合で表される。i はノードの番号、$x_i \in \{1,2,\cdots,n\}$ (ただし n は表現する論理関数の変数の数) は対応する変数、$low(i)$、$high(i)$ はそれぞれ0エッジ、1エッジで指されるノードの番号を表す。各変数から $\{1,2,\cdots,n\}$ の上への写像により、変数のレベルが定まっており、その値の小さいほど上位にあると呼ぶ。エッジはレベルが上位のノードから下位のノード、あるいは定数ノードを指す。

変数ノード i が表す関数 f_i は、

$$f_i = x_i \cdot f_{high(i)} + \bar{x}_i \cdot f_{low(i)}$$

と定義される。2個の定数ノードは、0および1を表す。

二分決定グラフのすべてのエッジがレベルの1だけ大きいノードを指すとき、密な二分決定グラフと呼ぶ[2]。2個のレベルの同じノード i, j が、同じ関数を表すとき、i と j は等価であると呼び、密な二分決定グラフから、等価なノードをすべて1個にまとめたものを、準既約な二分決定グラフと呼ぶ。本稿では、二分決定グラフとして準既約なもののみを考えるものとする。二分決定グラフのレベル k におけるノード数を $width(k)$ としたとき、

$$width = max_{1 \le k \le n} width(k)$$

を二分決定グラフの幅と呼ぶ。

3 二分決定グラフの最小推論

定義：二分決定グラフの最小幅推論問題
関数値の例 $\langle x, f(x) \rangle$ の集合 EX および正整数 k を与えられたとき、全ての $\langle x, f(x) \rangle$ を満たす幅 k 以下の二分決定グラフが存在するか。

定義：二分決定グラフの最小推論問題
関数値の例 $\langle x, f(x) \rangle$ の集合 EX および正整数 k を与えられたとき、全ての $\langle x, f(x) \rangle$ を満たすノード数 k 以下の二分決定グラフが存在するか。

ただし、$x \in \{0,1\}^n$ を変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の値、$f(x) \in \{0,1\}$ をそれに対応する論理関数値とする。また、二分決定グラフの変数の順序づけは、$x_1, x_2, \cdots, x_n$ の順に固定されているものとする。

$x_1, x_2, \cdots, x_k$ に対して値を割り当てたとき、EX を満たす関数は $n-k$ 変数の不完全指定論理関数と考えられる。不完全指定論理関数 f, g が、全ての x に対して、$f(x) = 1$ のとき $g(x) = 1$、$f(x) = 0$ のとき $g(x) = 0$ を満たすとき、$f \sqsubseteq g$ と書く。$f \sqsubseteq h$, $g \sqsubseteq h$ を満たす論理関数 h が存在するとき、f と g は共有可能、存在しないとき f と g は共有不可能であると呼ぶ。また、$H = \{h | f \sqsubseteq h, g \sqsubseteq h\}$ としたとき、$h' \in H$, $\forall h \in H\ h \sqsubseteq h'$ を満たすとき $h' = \sqcup\{f, g\}$ とする。

定理1 二分決定グラフの最小幅推論問題はNP完全である。

証明 まず、非決定性多項式時間アルゴリズムを示す。

n ビットの系列 x の上位 $i\ (0 \le i \le n)$ ビットを $prefix_i(x)$ とする。

[最小推論アルゴリズム]

1 : $P = \{prefix_i(x) \mid \langle x, f(x) \rangle \in EX, 1 \le i \le n\}$ とする。全ての $y \in P, 1 \le |y| < n$ に対し、$g(y) \in \{1, 2, \cdots, min(k, 2^{|x|})\}$ の値を guess する。また、$y \in P, |y| = n$ に対し、$g(x) = f(x)$ とする。

2 : 各 $1 \le i \le n, 1 \le j \le k$ に対し、$P_{i,j} = \{prefix_i(x) | g(prefix_i(x)) = j\}$ とする。

3 : 各 $1 \le i \le n, 1 \le j \le k$ に対し、$r, s \in P_{i,j}$ が $r \cdot 0 \in P$ かつ $s \cdot 0 \in P$ を満たすとき $g(r \cdot 0) = g(s \cdot 0)$ が成立するかどうか、$r \cdot 1 \in P$ かつ $s \cdot 1 \in P$ を満たすとき $g(r \cdot 1) = g(s \cdot 1)$ が成立するかどうかを調べる。全ての i, j, r, s に対して条件を満たせば受理する。□

このアルゴリズムの正当性を示す。系列 x は、レベル i において $g(prefix_{i-1}(x))$ 番目のノードを通るものとする。各 $1 \le i \le n, r \in P(|r| = i-1)$ について、レベル i の $f(r)$ 番目のノードから、$r \cdot 0$ のとき $f(r \cdot 0)$ 番目のノードに0エッジを、$r \cdot 1$ のとき $f(r \cdot 1)$ 番目のノードに1エッジをひくものとする。3: の条件を満たさないとき、1個の

On Minimum Binary Decision Diagram Identification
Yasuhiko TAKENAGA and Shuzo YAJIMA
Kyoto University

ノードから複数の0エッジまたは1エッジがひかれるため、二分決定グラフは得られない。3: の条件を満たすとき、各ノードからの0エッジ、1エッジは1本に限られるため、二分決定グラフから一部のエッジを除いたものが生成される。また、エッジのひき方より、与えられた全ての x に対して、ルートノードから、$f(x)$ への正しいパスが存在する。このとき存在しないエッジはどのノードを指してもよいので、全ての例を満たす幅 k 以下の二分決定グラフが存在する。

次に、グラフの k- 彩色可能性問題からの帰着により、NP 困難性を示す。

グラフ $G(V,E)$ のノード数を N とする。簡単のため、N を2のべきとする。このとき、以下のような $6logN+2$ 変数関数の関数値の例の集合を生成する。

$\langle B_i \cdot B_j \cdot B_p \cdot B_q \cdot 00 \cdot B_r \cdot B_s\ ,\ f_i(r,s)\rangle\ \ (r<s)$,
$\langle B_i \cdot B_j \cdot B_p \cdot B_q \cdot 01 \cdot B_r \cdot B_s\ ,\ f_j(r,s)\rangle\ \ (r<s)$,
$\langle B_i \cdot B_j \cdot B_p \cdot B_q \cdot 10 \cdot B_r \cdot B_s\ ,\ f_p(r,s)\rangle\ \ (r<s)$,
$\langle B_{N-1} \cdot B_{N-1} \cdot B_{N-1} \cdot B_q \cdot 11 \cdot B_r \cdot B_s\ ,\ g_q(r,s)\rangle$
$(r<s,(r,s)\in E)$,
$i=j=p=N-1$ 以外の組み合わせについて
$\langle B_i \cdot B_j \cdot B_p \cdot B_q \cdot 11 \cdot B_r \cdot B_s\ ,\ f_q(r,s)\rangle\ \ (r<s)$,

ただし、$0 \le i,j,p,q,r,s \le N-1$、$B_i$ は整数 i の2進表現とする。また、$f_0, f_1, \cdots, f_{N-1}$ および $g_0, g_1, \cdots, g_{N-1}$ は、次のように定められる。

$f_t(B_t, B_s) = 0$ iff $t < s$
$f_t(B_r, B_t) = 1$ iff $r < t$
$g_t(B_t, B_s) = 0$ iff $t < s$ かつ $(t,s) \in E$
$g_t(B_r, B_t) = 1$ iff $r < t$ かつ $(r,t) \in E$

また、二分決定グラフの幅を定める正整数を N^4-N+k とする。

以下に、これが正しい帰着となっていることを示す。f_t, g_t に関する次の性質を用いる。

性質 1. 任意の i,j $(i \ne j,\ 0 \le i \le N-1)$ に対し、f_i と f_j は共有不可能である。
2. $(i,j) \in E$ のときそのときに限り、g_i と g_j は共有不可能である。
3. $g_i \sqsubseteq f_i$ $(0 \le i \le N-1)$。
4. $g_{i_1}, g_{i_2}, \cdots g_{i_m}$ が共有可能な場合、$g' = \sqcup\{g_{i_1}, g_{i_2}, \cdots g_{i_m}\}$ は、f_{i_j} $(0 \le j \le m)$ のうち任意の1個と共有可能である。 □

補題 g_i $(0 \le i \le N-1)$ は、グラフ G が k- 彩色可能なときそのときに限り、各要素が全て共有可能な k 個の部分集合に分割できる。 □

レベルごとの最小ノード数は、次のようになる。

1. $1 \le level \le 4logN$ の場合

   2^{level} 以下。特に、$level = 4logN-1$ のとき $N^4/2$ 以下。

2. $level = 4logN+1$ の場合

   上位から $4logN-1$ 個の変数への、2個の異なる割り当てに対する関数を考える。これらがともに $i=j=p=N-1$ を満たす場合を除き、性質1よりその部分関数は共有不可能である。ともに $i=j=p=N-1$ を満たす場合、q の値により共有可能かどうかが決まる。補題より、ノード数は N^4-N+k となる。

3. $level = 4logN+2$ の場合

   N^2 個の $0 \cdot f_i + 1 \cdot f_j, 0 \le i,j \le N-1$ の形で表される関数と、$0 \cdot f_{N-1} + 1 \cdot h_l,\ 0 \le l \le k,\ h_l = \sqcup\{g_{i_1}, g_{i_2}, \cdots g_{i_m}\}$ の形で表される関数が存在する。前者は互いに、共有不可能であり、後者は全て前者のいずれかと共有可能である。よって、グラフ G が k- 彩色可能か否かに関わらず、ノード数は N^2 となる。

4. $level = 4logN+3$ の場合

   3と同様にして、ノード数は N。

5. $4logn+4 \le level \le 6logN+2$ の場合

   レベルが1増えるたびに、ノード数はたかだか2倍しか増えない。したがって、幅は $N \times 2^{2logN} = N^3$ を超えない。

$N \ge 2$ のとき、$N^4-N+k > N^4/2 \ge N^3$ を満たすことから、二分決定グラフの幅はレベル $4logN+1$ において、最大値 N^4-N+k をとる。 □

定理 2 二分決定グラフの最小推論問題は NP 完全である。

略証 定理1と同様にグラフの k- 彩色可能性問題から帰着をおこなう。グラフ G に対し、以下のような $7logN+4$ 変数論理関数の値の例の集合を生成する。

$\langle B_i \cdot B_j \cdot B_p \cdot B_q \cdot B_m \cdot {*}000 \cdot B_r \cdot B_s\ ,\ f_i(r,s)\rangle\ \ (r<s)$,
$\langle B_i \cdot B_j \cdot B_p \cdot B_q \cdot B_m \cdot {*}001 \cdot B_r \cdot B_s\ ,\ f_j(r,s)\rangle\ \ (r<s)$,
$\langle B_i \cdot B_j \cdot B_p \cdot B_q \cdot B_m \cdot {*}010 \cdot B_r \cdot B_s\ ,\ f_p(r,s)\rangle\ \ (r<s)$,
$\langle B_i \cdot B_j \cdot B_p \cdot B_q \cdot B_m \cdot {*}011 \cdot B_r \cdot B_s\ ,\ f_q(r,s)\rangle\ \ (r<s)$,
$\langle B_i \cdot B_j \cdot B_p \cdot B_q \cdot B_m \cdot 0100 \cdot B_r \cdot B_s\ ,\ f_m(r,s)\rangle\ \ (r<s)$,
$\langle B_i \cdot B_j \cdot B_p \cdot B_q \cdot B_m \cdot 1100 \cdot B_r \cdot B_s\ ,\ g_m(r,s)\rangle$
$(r<s,(r,s)\in E)$,
$\langle B_i \cdot B_j \cdot B_p \cdot B_q \cdot B_m \cdot 0101 \cdot B_r \cdot B_s\ ,\ f_1(r,s)\rangle\ \ (r<s)$,
$\langle B_i \cdot B_j \cdot B_p \cdot B_q \cdot B_m \cdot 1101 \cdot B_r \cdot B_s\ ,\ f_2(r,s)\rangle\ \ (r<s)$,

ただし、$*$ は 0,1 の両方を表す。また、二分決定グラフのノード数を定める正整数を $3N^5+(k+2)N^4$ とする。

各レベルのノード数を求めて合計すると、全体の最小ノード数は、

$num_{min}(N,k) = 3N^5+(k+1)N^4-1$ 以上、
$num_{max}(N,k) \doteq 3N^5+(k+1)N^4+2N^3-2N-1$

以下となる。

$num_{min}(N,k+1) > 3N^5+(k+2)N^4 > num_{max}(N,k)$

となることから、グラフ G が k 彩色可能な場合に限り、ノード数が $3N^5+(k+2)N^4$ 以下となる。 □

4 おわりに

本稿では、二分決定グラフの最小推論問題が NP 完全であることを示した。二分決定グラフでは、ノード数が変数の順序づけに大きく依存するため、今後は任意の変数の順序づけを許した場合の考察が重要と考えられる。

参考文献

[1] R. E. Bryant : "Graph-Based Algorithms for Boolean Function Manipulation", IEEE Trans. Comput. Vol.C35, No.8, pp.677-691 (1986).

[2] N. Ishiura : "Synthesis of Multi-level Logic Circuits from Binary Decision Diagrams",Proc. Synthesis and Simulation Meeting and Int. Interchange, pp.74-83 (1992).