ファジィ推移的結合問題の効率的解法*

1R−3

若林 高明 大内 東†
北海道大学工学部‡

1 はじめに

ISM(Interpretive Structural Modeling)[1] は Warfield によって開発されたシステム構造化技法の一つである．ISM ではシステム構成要素集合とその上の反射的かつ推移的二項関係(擬順序)に着目し，要素間の一対比較によって求められる要素間の相互関係から全体の構造を把握しようとする．今までに様々な改良を加えた ISM が考案されているが [2][3][4]，著者らはより柔軟な構造モデリングの実現を目的として，それらを改良した FISM/FUZZY を開発中である．FISM/FUZZY の主な特徴は要素間の二項関係の有無を関係の強さ，曖昧さを考慮してファジィ化したことである．FISM/FUZZY 過程は具象化，構造化，描画の三つの過程からなる．このうちの具象化過程において重要な部分を占めるのがファジィ推移的結合問題である．著者らは文献5) においてこの問題の解法を提案した．本稿では，ファジィ推移的結合問題の解についての新知見を得たので報告する．更に，その有効な応用としてのファジィ具象化について述べる．

2 諸定義・諸記号

本稿で使用する諸定義，諸記号を述べる．

定義 1 ファジィ関係 R：直積空間 $S \times S$ 上のファジィ集合．メンバシップ関数 $\mu_R : S \times S \to [0,1]$ によって特性づけられる．FISM/FUZZY で扱うファジィ関係は反射的かつ推移的であること（ファジィ擬順序）を前提とする．

定義 2 ファジィ行列 M：ファジィ関係 R を表現する行列．各要素 m_{ij} は順序対 $(i,j) \in N \times N$ の R への帰属度を示す．

$$0 \leq m_{ij} \leq 1, \ ^{\forall}(i,j)$$

定義 3 ファジィベクトル x,y：各成分 x_i, y_i が閉区間 $[0,1]$ 内の値を取る列ベクトル．x^T, y^T は行ベクトルを表す．

定義 4 二つのファジィ行列 A, B の大小関係を以下のように定義する．

$$A \ \leq (<) \ B \ \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \ a_{ij} \ \leq (<) \ b_{ij}, \ ^{\forall}(i,j)$$

定義 5 ファジィ行列 A, B に対し以下の演算を定義する．

- 和・積は通常のファジィ代数演算とする．
- $(A @ B)_{ij} \ = \ \min_k \ (a_{ik} \ \alpha \ b_{kj}) \ = \ \prod_k \ (a_{ik} \ \alpha \ b_{kj})$

  ここで，$a \ \alpha \ b = \begin{cases} 1 : a \leq b \\ b : a > b \end{cases}$
- $(\bar{A})_{ij} = 1 - a_{ij}$

*Efficient Solutions of a Fuzzy Transitive Coupling Problem
†Taka-aki WAKABAYASHI and Azuma OHUCHI
‡HOKKAIDO University

定義 6 可到達行列：以下の条件を満たすファジィ行列 M を（ファジィ）可到達行列という．

$$M = M + I \tag{1}$$

$$M^2 = M \tag{2}$$

ここで，I は単位行列である．言い換えれば M が可到達行列であるとは，反射的かつ推移的であることを言う．

3 ファジィ推移的結合

3.1 問題の定式化

共通のファジィ関係を有し，ファジィ行列 A,B で定義される二つのサブシステムを結合し，ファジィ行列 M で定義される一つのシステムを形成する問題をファジィ推移的結合という [5]．ファジィ推移的結合は，FISM/FUZZY において重要な部分を占める．システムの具象化を行うにあたり，システム構成要素が多い場合は，構成要素集合を幾つかの部分集合に分割して構造化を行い，後でその結果を結合してシステム全体のファジィ構造行列を形成することによって効率的な具象化が可能となる．

ファジィ推移的結合の目的は，以下のようなファジィ行列 M が可到達行列となるように，M の未知の部分を埋めることである．

$$M = \begin{bmatrix} A & X \\ Y & B \end{bmatrix} \tag{3}$$

ここで，A と B は既知のファジィ行列である．A と B は同じ次数である必要はない．s,t をそれぞれ A,B の次数とする．このとき，相互連関行列 X,Y はそれぞれ $s \times t$ 型，$t \times s$ 型のファジィ行列となる．

3.2 含意行列

M が可到達であるための条件より，部分行列 X,Y に課せられる条件は，行列の展開，演算子 @ を用いることにより (4)-(6)(または (7)) 式と等価であることが示される [6][7]．よって，ファジイ推移的結合問題を解くことは (4)-(6)((7)) 式を解くことに帰着される．以下では，X の列を縦に並べたベクトルを x，Y の行を横に並べたベクトルを y^T とする．

$$x \ = \ Px \tag{4}$$

$$y \ = \ P^T y \tag{5}$$

$$y^T \ \leq \ x^T \ @ \ F \tag{6}$$

または

$$x^T \ \leq \ y^T \ @ \ F^T \tag{7}$$

ここで，P は X の自己含意行列であり，(x_i, x_j^T) で添字づけられる P の (i,j) ブロックは

$$P^{i,j} = \delta_{ij} A + \bar{\delta}_{ij} b_{ji} A \tag{8}$$

と書き表せる．ここで，x_i は X の第 i 列，δ_{ij} は Kronecker のデルタであり，$\bar{\delta}_{ij}$ はその補数である．また，P^T は Y の自己含意行列である．F に

(x,y^T) で添字づけられる X から Y への相互含意行列である．(x_i, y_j) で添字づけられる F の (i,j) ブロックは

$$F^{i,j} = \delta_{ij}A + \bar{\delta}_{ij}\,(b_{ji}I + \bar{I}) \qquad (9)$$

となる．ここで，y_j は Y の第 j 行である．一方，F^T は (y,x^T) で添字づけられる Y から X への相互含意行列である．

P^2 を実際に計算することにより，P は可到達行列であることが示される．P^T もまた可到達行列である．

3.3 ファジィ推移的結合の特殊解

(4)-(6)((7)) 式の自明な解は，すべての未知数が 0 となるものである．文献 [5] において提案した一般解を求める方法では，例えば，自己含意行列がすべて非ゼロ要素からなる場合は一般解を求めることは困難であった．しかし，条件を満たすある種の解は容易に求めることができる．今後はその解を特殊解という．以下では特殊解に関する定理を述べる (証明略)．文中の p_{ij} は自己含意行列の，f_{ij} は相互含意行列の要素とする．

定理 1 以下で表される組 (x,y) は (4)-(6) ((7)) 式の解である．

特殊解 1

$$x,\ x_i = \sum_{j\neq i} p_{ij},\ {}^{\forall}i \qquad (10)$$

$$y,\ y_j = \prod_i (x_i\ \alpha\ f_{ij}),\ {}^{\forall}j \qquad (11)$$

特殊解 2

$$x,\ x_i = \prod_j (y_j\ \alpha\ f_{ij}),\ {}^{\forall}i \qquad (12)$$

$$y,\ y_j = \sum_{i\neq j} p_{ij},\ {}^{\forall}j \qquad (13)$$

特殊解 3(max−min 解)

$$x,\ x_i = \sum_{j\neq i} p_{ij},\ {}^{\forall}i \qquad (14)$$

$$y,\ y_i = \prod_i p_{ij},\ {}^{\forall}j \qquad (15)$$

特殊解 4(min−max 解)

$$x,\ x_i = \prod_j p_{ij},\ {}^{\forall}i \qquad (16)$$

$$y,\ y_j = \sum_{i\neq j} p_{ij},\ {}^{\forall}j \qquad (17)$$

特殊解 5(min−min 解)

$$x,\ x_i = \prod_j p_{ij},\ {}^{\forall}i \qquad (18)$$

$$y,\ y_j = \prod_i p_{ij},\ {}^{\forall}j \qquad (19)$$

max−max 解が存在しないのは，(6) 式 (7) 式が x または y の要素のうち一方の値が総じて大きいならば，他方の値は総じて小さくなるという性質に起因する．そのような性質の下で未知要素の値をできる限り大きくするものが特殊解 1 及び 2 である．

推移的結合を実際に適用した場合，各特殊解のうちどれを選択するかは，既知行列 A と B に対応するサブシステム S_1, S_2 の要素の相互間に階層構造を認めるかどうかによる．例えば，二項関係が“優先する”のとき，S_1 の要素の S_2 の要素に対する優先度が総じて高い場合は，最も適切な解は max−min 解であり，S_1 の要素と S_2 の要素の関係の度合いが総じて低い場合は min−min 解である．

4 ファジィ具象化への応用

本章では，FISM/FUZZY における推移的結合を用いたファジィ具象化過程の詳細を述べる．

前処理 構成要素集合 S を互いに排反な部分集合 $S_1, S_2, \cdots, S_m$ に分割する．このステップは FISM/FUZZY セッション参加者が KJ 法等を用いて行う．その際，各構成要素群の特徴が明確となるように分割するのが望ましい．

第一フェーズ それぞれの構成要素の部分集合に対し，部分具象化を行う．各部分集合から二つの要素を選んで一対比較を行って得られた 2 × 2 型行列に推移的拡大 [5] を用いて逐次的に要素を付加してゆき，各部分構造行列を得る．この際，初期の段階で機械的に部分構造行列を決定してしまうと後で同じ値が構造行列中に多く現れてしまうので，特に 2 × 2 型から 3 × 3 型への拡大は柔軟かつ慎重に行う必要がある．

第二フェーズ 得られた部分構造行列に推移的結合を行って，全体の構造行列を得る．この際に部分行列相互間の階層構造に応じて適切な解を選択する．

5 おわりに

本稿では，ファジィ推移的結合問題に特殊解が存在することを示した．既知行列 A,B に対して各特殊解が一意的に決定するので，効率的に推移的結合問題を解くことができる．モデル生成者はシステムの階層構造に応じてこれらの中から適切な解を選ぶことができる．更に，推移的結合を応用した FISM/FUZZY におけるファジィ具象化を提案した．提案した方法では，各部分構造行列及びその間の階層構造が決定すれば，自動的にシステム全体のファジィ構造行列を生成することができる．この方法を用いることによって，マンパワーを要する要素間の一対比較の回数が低減され，効率的なシステムの具象化を図ることができる．

参考文献

[1] J.N.Warfield : “ Societal Systems–Planning, Policy and Complexity”, John Wily(1976)

[2] 大内 : “ FISM : 柔軟な発想支援ツール”, 発想支援システムの構築に向けて-国際研シンポジウム報告書, pp398–411, (株) 富士通研究所国際情報社会科学研究所 (1991)

[3] R.K.Ragade : “ Fuzzy Interpretive Structural Modeling”, *J. of Cybern.*, Vol.6, pp189-211 (1976)

[4] E.Tazaki and M.Amagasa : “ Structural Modeling in a Class of Systems Using Fuzzy Sets Theory”, *International Journal for Fuzzy Sets and Systems*, Vol 2. No.1, pp1–17(1979)

[5] 若林，大内 : “ ファジィシステム構造行列の推移的結合”, 情報処理学会論文誌, 33 巻 5 号, pp620–627 (1992)

[6] 児玉，須田 : “ システム制御のためのマトリクス理論”, 計測自動制御学会 (1978)

[7] E.Sanchez : “ Resolution of Composite Fuzzy Relation Equations”, *Informatioin and Control* 30, pp38-48 (1976)