一列化と半順序なグラフの分割

1Ｒ－2

加地太一　　大内　東
北海道情報大学　北海道大学

1　はじめに

本問題は半順序集合Ｓを表現する無閉路有向グラフＧに対して半順序性を保持し、各部分集合の頂点の重みの総和がブロック・サイズ以下である条件のもとでカットされる辺のコストの総和が最小になるよう分割を求める。

この問題に対して分割を一意に表現する切断決定子を導入し、その性質を明らかにする。さらに、その切断決定子と無閉路有向グラフの一列化における切断の関係から、効果的な切断決定子の生成を考察し、それより本問題のアルゴリズムの概要を示す。

2　諸定義

無閉路有向グラフＧに対して、任意な下側集合、上側集合の分割（Ａ、Ｂ）が行われたとする。$x \in B$のすべての直接の先行点がＢ自身に属するものを内点、そうでないものを境界点とする。この境界点の集合を用いて、系列グラフ分割問題[1]の分割を一意に示すブレーク・ポイントと同様に、半順序な切断を一意に表現する切断決定子αを表す。切断決定子αはその上側集合Ｂのすべての境界点から構成される。また以下の性質が成り立つ。

（1）下側集合Ａの任意の要素ａと上側集合Ｂの任意の要素ｂが比較可能ならば、かならず$a < b$となる。

（2）切断決定子αによりＧの下側集合、上側集合の分割が一意に定まる。

さらにグラフＧに対して複数の切断を試みた場合のすべての切断決定子からなる集合をΩとし、α_1、$\alpha_2 \in \Omega$に対して各下側集合をA_1、A_2とするとき、$A_1 \subset A_2$が成立するならば、α_2はα_1より優位である半順序関係が生じ、$\alpha_1 \ll \alpha_2$で表す。

このような半順序関係が保たれる切断決定子の列による分割を無閉路有向グラフにおける系列分割と言う。

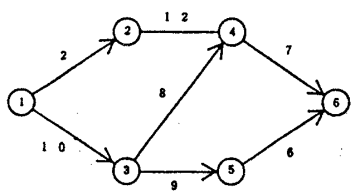

図1　無閉路有向グラフ

3　一列化と無閉路有向グラフの分割

一列化の問題とは半順序を全順序に埋め込むことである。半順序なグラフはいつでも一列化が可能である。ここで、無閉路有向グラフの分割とその一列化されたグラフの分割の関係について以下の定理を示す。また無閉路有向グラフからは複数の一列化グラフが生成されることは自明である。

定理１.

ある無閉路有向グラフＧの任意の切断決定子ＰはＧのある一列化されたグラフのブレーク・ポイントによって誘導された切断に等しい。

証明

ＰによるＧの切断によって下側集合Ｂ、上側集合Γ（両集合ともＰの要素は含まない）に分割される。このとき両部分集合Ｂ、ΓおよびＰはすべて半順序であることが示せるので、Ｂ、ΓおよびＰの一列化が可能である。それぞれ一列化されたあるグラフをB'、Γ'およびP'とする。このときB'、Γ'の間にP'を挿入し、B'、P'、Γ'の間の欠損されたエッジをつなぐ。ここでB'、Γ'の間をつなぐエッジは存在せず、B'からP'への有向辺、およびP'からΓ'への有向辺のみしか存在しないことが示せる。したがって、ＧのＰによる切断はＧをB'、P'、Γ'によって一列化したグラフをP'の先頭要素をブレーク・ポイントとした分割と一致する。

逆に半順序なグラフＧを一列化した任意のグラフＴに任意のブレーク・ポイントを置いた場合、Ｇのある分割を表す。すなわち切断決定子Ｐが構成される。任意のブレーク・ポイントに対して切断される辺がカットセットとなり、ブレーク・ポイントによってカットされるすべての辺が到達するノードの集合がある切断決定子と一致することより切断決定子Ｐの存在が示せる。ゆえに上記の定理が成立する。

□

定理２.

半順序グラフＧにおける系列分割はＧのある一列化されたグラフの系列分割と一致する。

証明

Topological Sorting and Partitioning of Acyclic Graphs
Taichi Kaji, Azuma Ohuchi
Hokkaido Information University, Hokkaido University

Gの系列分割における切断決定子の列をα_1、α_2、・・・、α_nとする。第一番目の切断決定子α_1は定理１より一列化の分割として実現可能である。

α_1から第ｉ番目のα_iまでの半順序関係を保った切断決定子列による分割が一列化されたグラフのある系列分割で実現可能であるとする。

α_iを含めた上側集合に対して$\alpha_i \ll \alpha_{i+1}$となる切断決定子$\alpha_{i+1}$は定理１よりある一列化されたグラフの切断で表現できる。そのときのα_i、α_{i+1}に相応する一列化グラフのブレーク・ポイントも順序性を保持することは自明であるので、α_1、α_2、・・・、α_i、α_{i+1}の系列分割は一列化されたグラフのある系列分割と一致する。以上より定理は成立する。

□

本問題は半順序なグラフに対しての全ての一列化された系列グラフの中での最適解を求めることと一致する。

４　アルゴリズム

定理２より半順序グラフの系列分割の最適解はすべての一列化グラフを生成し、それぞれの最適系列分割の中で最良な解を求めることにより得られる。しかし、この場合、それらの系列グラフに対して同一の部分グラフが重複し、不必要な計算を行うこととなる。したがって、重複された計算を行わないために本算法は以下の方針で構成する。

１）全ての切断決定子を生成し、半順序系列に整列する。

２）各切断決定子に対して動的計画法を用い、整列順に部分解の最良値を確定していく。

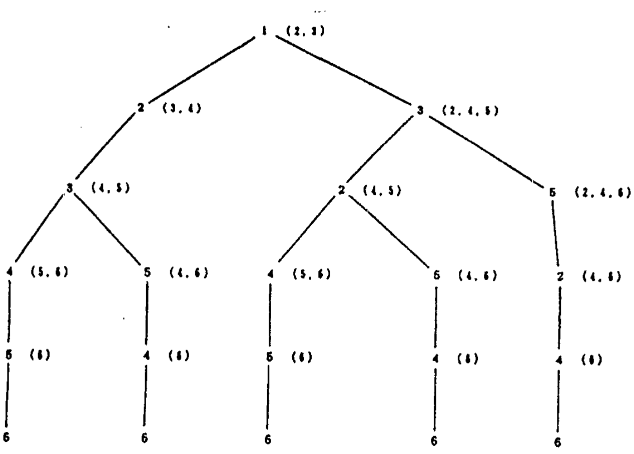

図２　一列化グラフを生成する探索木

１）の算法は定理１より一列化されたグラフを全て生成することによって、全ての切断決定子が生成される。このとき同一の切断決定子が複数生成されるため限定操作を行う。図２に図１の無閉路有向グラフからすべての一列化グラフを生成する探索木を示す。このとき、ルートからリーフの頂点番号系列はそれぞれ一列化された番号列である。また各節点にはその節点自身とすべての親の節点を含んだ下側集合とそれ以外を上側集合に分割したときの切断決定子を割り当てる。また同一の切断決定子は探索木の同レベル中にしか存在しないということに着目する。探索戦略に横型探索を用い、レベルごとに展開を進める。このとき、子節点の候補者は対象節点を削除したとき、入り次数が０となる頂点が選ばれる。またレベルごとに同一の切断決定子が存在する場合、親節点へのポインターのみを付加し、一つの節点以外、残りを削除する。以上の展開操作によりすべての切断決定子が生成され、探索木の親子関係で容易に半順序関係が示せる。図３が図１の切断決定子を生成し、一列化したものである。

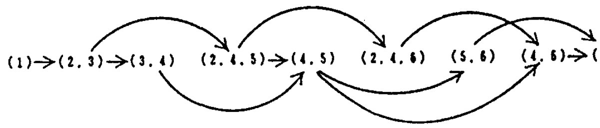

図３　すべての切断決定子の一列化

２）の算法の段階で各切断決定子の最良部分解を確定していく。ここで切断決定子α_1に対して次に切断決定子α_2が置かれたとしたときの増分コストをＩ（α_1、α_2）とする。また切断決定子αに対する最小部分解コストをＭ（α）とすると、以下の手順で部分解が確定していく。

１　Ｍ（０）＝０；

２　ｆｏｒ　ｘ＝１　ｔｏ　切断決定子数＋１

　　　Ｍ（ｘ）＝ｍｉｎ｛Ｍ（ｙ）＋Ｉ（ｘ，ｙ）｝

このとき、切断決定子ｙはブロックサイズ分の範囲内で制約される。

５　おわりに

本論文では無閉路有向グラフに対する切断の表現法と性質を明らかにし、分割の効果的なアルゴリズムを提示した。さらにスケジューリングなどの応用問題に当てはめ、実用的な算法を開発研究する。

参考文献

1)Brian.W.Kernighan: Optimal Sequential Partitions of Graph, J.ACM,Vol.18,No.1,pp.34-40(1971).

2)加地、大内 : 分子限定法による系列分割問題の算法構成と効率, 情報処理学会研究報告, 92-AL-28,pp25-32(1992).