2Q−4

ファジィ項目関連構造分析による学習者集団の評価 *

伊藤公紀[†]　大内 東[†]

北海道大学工学部[‡]

1 はじめに

学習者のテスト項目の得点は必ずしも教師が認識しているテスト項目の難易度順に一致しておらず，このような情報を利用して教師は自らの教授法や学習課題の提示順序等の改善の手掛かりとしたり，あるいは学習者集団の特性を知ることの助けとする．

各テスト項目に対する正誤反応を1−0の2値パターンで表現し，学習者集団全体に対してのテスト項目全体の関連構造を解析する方法は数多く報告されている．例えば，Airasian & Bart の順序理論 [1] や竹谷によって提案された項目関連構造分析 (Item Relational Structure Analysis: IRS 分析 [2]) などがある．

これらは学習者集団全体の平均的特性を得る手法である．通常の場合，分析対象となる学習者集団の各構成員はテスト項目に対する反応が均一であるという保証はなく，むしろ様々な特性を持つ学習者の集合体と考えるのが自然である．このような場合，平均的特性から逸脱するような少数の学習者群は全体の中に埋没してしまい，それぞれの特性にあった指導につなげることが難しい．

また，一般に教師はテスト項目に対して正答か誤答かの2値的な評価ばかりではなく，場合によっては多値的な評価を下す必要がある．このとき，IRS 分析等の手法を適用するためには，各テスト項目における学習者の得点を適当なしきい値によって2値化する必要がある．

上述の事柄を考慮し，各学習者の多値的なテスト項目に対する得点データから，2値化することなしに個人別のテスト項目間のファジィな達成順序関係を得ることができ，さらに各学習者ごとの達成順序関係から特性が類似した学習者ごとの傾向を判断することを主眼におく分析法としてファジィ項目関連構造分析法 (Fuzzy Item Relational Structure Analysis: FIRS 分析) を報告する．なお，具体的な指導内容の考察は本稿の範囲外である．

2 FIRS 分析の手続き

Airasian & Bart の順序理論や竹谷の IRS 分析は，2つのテスト項目間の順序関係の学習者集団全体についての統計的分析であり，算出された達成順序に沿わないような少数の学習者の反応はノイズ的に扱われている．しかしながら，学習者集団全体についての統計的分析のみでは不都合な場合もある．例えば特性を異にする構成員が同数の小集団が2つあった場合は，その2つの小集団をまとめた集団全体について分析した結果は両集団の平均的な結果であり，この結果に基づく教育的指導効果は薄いといえる，等である．

FIRS 分析では，一般には学習者集団全体で均一な特性を有するという保証はないことを踏まえ，少数の学習者の反応はノイズではなくむしろ集団の特性の一翼を担うものと考え取り扱う．すなわち，学習者集団をテスト項目に対する反応パターンに応じてクラスターに分割し，小集団ごとに分析を行う．

本手法の手続きは，以下の流れに従う．

2.1 得点データ行列 E の作成

まず初めに，学習者の各テスト項目に対する得点データのとり得る最大値を1，最小値を0となるように正規化し，その正規化されたデータを成分とする得点データ行列 E を作成する．

得点データ行列 E は，垂直添字集合に学習者集合 $S = \{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$ を，水平添字集合にテスト項目集合 $T = \{t_1, t_2, \cdots, t_m\}$ を持つ．

$$E = [e_{ki}] \ \ (0 \le e_{ki} \le 1,\ 1 \le k \le n,\ 1 \le i \le m) \tag{1}$$

E の成分 e_{ki} は学習者 s_k のテスト項目 t_i に対する得点を表す．

2.2 ファジィ擬順序関係行列 R_k の算出

一般に，学習者 s_k がテスト項目 t_i に対して低い得点 e_{ki} を示し，t_j に対して高い得点 e_{kj} を示している場合，学習者 s_k にとっては t_i に含まれている学習課題の達成が t_j に含まれている学習課題を達成することよりも困難であるといえる．

このようなとき，本稿では学習者 s_k は t_i の達成に t_j の達成を必要条件としていると見なす．このとき，学習者 s_k の T 上のファジィ擬順序関係行列 R_k の成分をファジィ論理の含意の値として考え，記号で $(t_i \Rightarrow t_j)_k$ のように表わす．

$$(t_i \Rightarrow t_j)_k = F(e_{ki}, e_{kj}) \tag{2}$$

ここで，F は Gödel のファジィ含意関数であり次のように定義される．

$$F(e_{ki}, e_{kj}) = \begin{cases} 1 & (e_{ki} \le e_{kj}) \\ e_{kj} & (e_{ki} > e_{kj}) \end{cases} \tag{3}$$

各学習者について (2) 式により含意を計算し，水平および垂直添字集合にテスト項目集合 T をもつ行列 $R_k (k = 1, 2, \cdots, n)$ を求める．

$$R_k = [r_{ij}^k] \ \ (1 \le i \le m, 1 \le j \le m, 1 \le k \le n) \tag{4}$$

ただし，

$$r_{ij}^k = F(e_{ki}, e_{kj}) \tag{5}$$

定理 1 R_k はファジィ擬順序関係行列である．
(証明)　省略

2.3 学習者の類別化

各学習者のテスト項目の難易度順序が異なる場合，学習者集団全体におけるテスト項目集合上の達成順序関係の決定方法としては，例えば，全体の平均を求める方法等が考えられる．この場合，非常に特殊な特性を持つ少数の学習者の影響を受けたまま判断を下している可能性があり，各学習者の特性を正確に反映していない．このようにして得られた分析結果をもとに教授法の変更を行うことや学習者集団の特性として捉えるよりも，異なる特性を持つグループが存在する場合にはその存在を浮き彫りにし，各グループごとの特性を明らかにする方が望ましい．

---

*An Evaluation of Students based on Fuzzy Item Relational Structure Analysis

[†]Kohki ITOH, Azuma OHUCHI
[‡]Faculty of Engineering, Hokkaido University

従って本手法では，R_kを基にほぼ同様な観測結果を有する学習者のクラスターを得て，各クラスターごとにそのクラスターを代表するようなファジィ擬順序関係を決定する．

得点データ行列Eではなく学習者個人別のファジィ擬順序関係R_kの成分を基にしてクラスタリングを行うのは，獲得得点の学習者間の偏差の小ささを類似の尺度と考えるのではなく，擬順序関係の相違を類似の尺度として考えているためである．

本手法ではGitmanのモード探索法(mode seeking technique)[5]を用いてクラスターC_pを得る．モード探索法の詳細は省略する．

2.4 ファジィ擬順序関係行列G_pの算出

同種同質なn_p人の学習者で構成されたC_pに所属するR_kの交わりで得られる行列G_pを求める．

$$G_p = [g_{ij}^k] \ \ (1 \le i \le m, 1 \le j \le m, 1 \le p \le q) \tag{6}$$

ただし，

$$g_{ij}^k = \min_k r_{ij}^k \ \ k \in C_p \tag{7}$$

定理 2 G_pはファジィ擬順序関係行列である．
（証明） 省略

2.5 ファジィ擬順序関係行列Aの算出

学習者集団全体の特性は次の行列Aによって表わす．

$$A = [a_{ij}] \ \ (1 \le i \le m, 1 \le j \le m) \tag{8}$$

ただし，

$$a_{ij} = F\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_{ki}, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_{kj}\right) \tag{9}$$

Aはファジィ擬順序関係行列である．

なお厳密には等しいものではないが，Airasian & Bartの順序理論やIRS分析によって得られる結果は，Aを求めることと対応付けられる．

2.6 達成順序の分析

任意のしきい値αによってR_k, G_p, Aを2値化し，クリスプな擬順序関係行列B_k, B_p^G, B^Aを作成する．

$$B_k = [b_{ij}^k] \ \ (1 \le i \le m, \ 1 \le j \le m, \ 1 \le k \le n) \tag{10}$$

$$B_p^G = [b_{ij}^p] \ \ (1 \le i \le m, \ 1 \le j \le m, \ p \in C_p) \tag{11}$$

$$B^A = [b_{ij}^A] \ \ (1 \le i \le m, \ 1 \le j \le m) \tag{12}$$

テスト項目をノード，擬順序関係をアークとして有向グラフで表現する．このとき，サイクルが存在する場合はノードを縮約し，さらに推移的リダクション[4]と呼ばれる操作を行い，冗長なアークを取り除き，各ノード間の可到達関係を最も少ないアーク数で表現する．なお，推移的に冗長なアークとは，サイクルのない有向グラフからそのアークを取り除いた部分グラフが元のグラフの持つ可到達性を保つようなアークを指す．以下，本稿ではB_k, B_p, B^Aの有向グラフ表現に対して推移的リダクションを施したグラフをリダクショングラフと呼ぶ．

なお，IRS分析等で描かれるグラフと共通性を持たせるため，B_k, B_p^G, B^Aの成分b_{ij}が1であるとき，t_jからt_iへのアークを描く．

リダクショングラフの構造上の特徴から，学習者の学習課題に対する達成状況を判断する．考慮すべき構造には以下の2点が挙げられる．

1. 入次数および出次数

   リダクショングラフのノードt_iの入次数はt_iを達成するために必要とするノード数を表わす．入次数の高いノードは応用的なテスト項目であると呼ぶ．逆に入次数の低いノードは初歩的なテスト項目であると呼ぶ．

   また，出次数はt_iの達成を必要条件とするノード数を表わす．出次数の高いノードは基礎的なテスト項目であると呼ぶ．逆に出次数の低いノードは発展的なテスト項目であると呼ぶ．

   なお，基礎的でかつ応用的なテスト項目や発展的でかつ初歩的なテスト項目という組み合わせは矛盾ではなく有り得る[6]．

   2つのグラフG_a, G_bのi番目のノードをそれぞれt_i^a, t_i^bとする．入次数と出次数に注目したときのG_a, G_bの構造上の相違を表わす指標として，入次数と出次数をそれぞれ軸とした2次元平面での対応するノードt_i^a, t_i^b間のユークリッド距離$d(t_i^a, t_i^b)$を用いる．t_i^aとt_i^bの相違度D_i $(0 \le D_i \le 1)$は(13)式によって求める．

   $$D_i = \frac{d(t_i^a, t_i^b)}{(m-1)\sqrt{2}} \tag{13}$$

   また，G_aとG_bの全体としての相違度D $(0 \le D \le 1)$は(14)式によって求める．

   $$D = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} D_i \tag{14}$$

   D_iおよびDはその値が1のとき相違度が最大で0のとき相違度が最小を表わす．

2. サイクル構造

   しきい値αの時にサイクル構造があるのは，サイクルを形成しているテスト項目同士がαのレベルで等価であることを表わしている．

   αを高い値に設定するほど，サイクル構造が得られにくくなる．

3 おわりに

本稿では学習者各個人のテスト項目への多値的反応パターンから，ファジィ含意関数によって個人ごとのテスト項目間のファジィな達成順序関係，すなわちテスト項目集合上のファジィ擬順序関係を算出し，さらにファジィ擬順序関係を基にクラスタリング手法を用いて学習者の類別化を行い，クラスターごとにファジィ擬順序関係を得るテスト項目の特性解析法を報告した．

本手法は学習者の特性に応じた教育的指導，特に個や小集団に対する指導に役立たせることが期待できる．

参考文献

[1] Airasian,P.W. and Bart,W.M.:" A New and Useful Measurement Model", *Educational Technology*, pp.56-60 May, (1973).

[2] 竹谷誠:"教育評価に利用するテスト項目関連構造分析", 電子通信学会論文誌, Vol.J62-D, No.7, pp.451-458, (1979).

[3] 水本雅晴:"ファジィ理論とその応用", サイエンス社, (1988).

[4] Aho,A.V., Garey,M.R. and Ullman,J.D.: "The Transitive Reduction of a Directed Graph", *SIAM J. Comput.*, Vol.1, No.2, pp.131-137, (1972).

[5] Gitman,I. and Levine,M.D.: "An Algorithm for Detecting Unimodal Fuzzy Sets and Its Application as a Clusterring Techniques", *IEEE Transaction on Computer*, C-19, 7, (1970).

[6] 新藤茂, 赤堀侃司:"項目協同関連構造 (Item Co-Relational Structure) によるテストの特性解析", 日本教育工学雑誌, 12(2), pp.37-49, (1988).