5G−1 命題論理充足可能性問題に対する定量的アプローチと記号的アプローチの比較

大柳 俊夫　山本 雅人　栗原 正仁　大内 東

(北海道大学)

1 はじめに

命題論理の充足可能性問題（SAT）は，情報処理の分野における基本的な問題の一つで，現在まで多くの研究が行われている．それらの研究は，Robinson の導出原理に基づく記号的アプローチと，OR 技法の一つである 0-1 整数計画法に基づく定量的アプローチに大別できる [1]．これまでの記号的アプローチと定量的アプローチの関係に関する研究は，Davis-Putnam(DP) の方法と 0-1 整数計画法の対応，導出節と 0-1 整数計画法のカットの密接な関係，などの理論的な議論と，計算機上の数値実験として DP と分枝限定法および切除平面法との比較などが行われている [3]．しかし，記号的アプローチの中で最も有効と考えられるホーン緩和戦略 [2] と整数計画法の比較や，整数計画法のアルゴリズムの SAT 向きの見直しなどはほとんど行われていない．最近著者らは，定量的アプローチの 1 つとして 0-1 整数計画問題に対する陰的列挙法 [4] を SAT 向きに改訂した改訂陰的列挙法を提案している [5]．

本稿では，著者らが考案した改訂陰的列挙法の概略とそのインプリメンテーション方法について述べる．そして，改訂陰的列挙法とホーン緩和戦略の比較実験をランダム 3-SAT を用いて行った結果について報告する．

2 SAT と 0-1 整数計画問題

一般に節形式で与えられた SAT を 0-1 整数計画問題へ定式化すると以下の形式になる．

$\{\min x_0 | x_0\mathbf{e} + \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, x_0 \in \{0,1\}, \mathbf{x} \in \{0,1\}^n\}$

この問題は，陰的列挙法で想定している標準形の問題となっており，さらに，$x_0 = 1, \mathbf{x} = \mathbf{0}$ という実行可能解を持つことが明らかである．また SAT が充足可能であればまたその時に限り $x_0 = 0$ という解が存在することが知られており，従って問題は，$x_0 = 0$ となる解を陰的列挙法を用いて探索することになる．

3 改訂陰的列挙法

改訂陰的列挙法は，SAT を 0-1 整数計画問題に定式化した場合の以下の特徴を利用して一般の陰的列挙法を SAT 向きに改訂したものであるなお，以下の説明で用いる記号，用語等は，文献 [4] による．

(1) x_0以外の目的関数の係数はすべて 0 である．

(2) 暫定解は，$(x_0, \mathbf{x}) = (1, \mathbf{0})$ である．

(3) 係数 a_{ij}の値は，$-1, 0, 1$ のいずれかである．

まず (1) と (2) の特徴より，陰的列挙法で行っている論理テストのうち目的関数の係数に着目したものが省略可能となる．つまり，このテストで値を 0 にしなければならない自由変数の集合 Q_0^kは，常に空集合であることになる．これにともない，実行可能性を判定する尺度である s_iの計算は，現在の自由変数集合 N^kに関してのみ考えればよく，その計算は $s_i = \sum_{j \in N^k} \max\{0, a_{ij}\} - b_i^k$，となる．

そして (3) の特徴より，$R = \{i \in M | s_i = 0\}$(ただし Mは，制約式番号の全体集合である）を考えると，文献 [4] の定理 3.4，定理 3.5 を以下の様に改訂することができる．

定理 3.4′ $\bar{\mathbf{x}}^k$を暫定解 $\mathbf{x}^*$よりよい $\mathbf{x}^k$の実行可能な完成解とする．このとき $i \in R, h \in N_k$に対し，$a_{ih} = 1$ ならば$\bar{x}_h^k = 1$，$a_{ih} = -1$ ならば$\bar{x}_h^k = 0$ でなくてはならない．

定理 3.5′ $\mathbf{x}^k$の実行可能な完成解で，暫定解 $\mathbf{x}^*$よりよいものは，$x_j = 1, \forall j \in Q_+^k$; $x_j = 0, \forall j \in Q_-^k$，をみたさなくてはならない．したがって，$Q_+^k \cap Q_-^k \neq \phi$ならば暫定解 $\mathbf{x}^*$よりよい $\mathbf{x}^k$の実行可能な完成解は存在しない．ただし，

$Q_+^k = \{h \in N^k | a_{ih} = 1, i \in R\}, Q_-^k = \{h \in N^k | a_{ih} = -1, i \in R\}$，

である．

この改訂により，0 または 1 に固定される変数をテストするときに考慮しなければならない制約式の集合が，全体集合 Mから Rに縮小されるため，本論理テストの効率化が期待される．

代理制約式の作成に関しては，作成のために連続緩和された線形計画問題を最低 1 度は解く必要があり，予備的な実験の結果，線形計画問題を解く時間が，論理テストのみを行って SAT を解いた場合に比べ極端に大きかったため，作成しないこととした．

また，探索の繰り返しの中で，値を 1 にする変数の選択は，選択に要する時間をできる限り小さくするために，値が固定されていない変数集合の中から任意に選ぶこととした．

4 インプリメンテーション

前章で述べた改訂陰的列挙法をインプリメントする際に考慮しなければならない事項は次の通りである．

- 値が 1 または 0 に固定されている変数リスト (S^k) の表現
- 陰的列挙法の探索過程で 0-1 変数の補数をすでにとったか否かの情報の表現
- 自由変数集合 (N^k) の表現

S^kおよび N^k に対する操作を検討すると次のようになる．s^kに対しては，リストの最後への要素の追加およびリストの最後の要素の削除のみで，リストの途中の要素に対する直接的な操作はない．これに対し N^kに対する操作は，リストの最後への要素の追加およびリスト中の要素（最後とは限らない）の削除が必要となる．以上の操作を効率良く（O(1) で）行うために，今回考案したデータ構造を例を用いて説明する．例として，変数の数が 10 で，ある探索の段階で値が 1 または 0 に固定されている変数リストが，

$$S^k = (\ 2\quad 3\quad \underline{4}\quad \underline{-6}\quad 9\ )$$

となっている場合を考える．ここで，S^kの番号の絶対値が値が固定されている変数番号，符号が固定されている値を表し，正であれば

On Quantitative Approach and Symbolic Approach for SAT
Toshio OHYANAGI, Masahito YAMAMOTO, Masahito KURIHARA and Azuma OHUCHI
Hokkaido University

1, 負であれば 0 に固定されていることを示す．また下線は，その変数がすでに補数をとられていることを意味する．よって自由変数の集合 N^kは，$N^k = \{1,5,7,8,10\}$ となる．

今回開発した改訂陰的列挙法のコードでは，以上の情報を，以下の図1に示す3本の1次元配列を用いて表現している．

index	1	2	3	4	5
S^k	2	3	-4	-6	9

index	1	2	3	4	5
N^k	1	5	7	8	10

変数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
値	1	-1	-1	-1	2	0	3	4	-1	5

図1　S^kおよび N^kの表現

S^kについては，探索の過程で追加された順に変数番号を配列に記憶する．ただし，補数がとられている場合は変数番号に負の符号を付ける．この例では，変数番号 4 と 6 が負の符号を持つが，これは上記の S^kのリスト中で下線が引かれていたからである．また N^kについては，自由変数の番号を配列に記憶する．そして各変数に関する情報を，図1の一番下配列を用いて管理する．具体的には，正の値を持つ変数は N^kの要素で，配列 N^k中でその正の値を index とする位置に記憶されていることを示す．また 0 の値を持つ変数は S^k中の要素で，値が 0 に固定されているもの，-1 の値を持つ変数は S^k中の要素で，値が 1 に固定されているものをそれぞれ示す．例えば変数 5 の場合，値が 2(正) であるから，この変数は自由変数で N^kの配列中の 2 番めの要素になっていることがわかる．また変数 3 の場合は，値が-1 であるから S^k中の要素で，値が 1 に固定されていることを意味する．

5　ホーン緩和戦略

ホーン緩和戦略とは,SATとして与えられた節集合に変換をほどこし，ホーン節集合と非ホーン節集合に分けて考える方法で，SAT がホーン節集合の場合には，その問題を線形時間で解くアルゴリズム [6] が存在することを利用したものである．この方法は，記号的手法の中で最も有名な Davis-Putnam の方法よりも効率が良いことが確認されている [2]．

6　数値実験

6.1　実験方法

改訂陰的列挙法とホーン緩和戦略に対し，ランダム 3-SAT 問題を作成し，変数の数と節数の変化に対する計算時間の比較を行った．なおプログラムは,SPARC Station 2(メモリー 48MB) 上で，改訂陰的列挙法は C 言語，ホーン緩和戦略は SUN Common Lisp 言語を用いて開発した．

6.2　実験結果

実験結果を表1に示す．表中の値は 5 題のランダム 3-SAT 問題を解いた計算時間の平均 (単位 (s)) で，T/F の欄は充足可能性の判定結果を表し,T,F のみは 5 題すべてが充足可能もしくは充足不能で計算を終了したことを示し，記号 T=数値は，充足可能な場合の問題数を示す．なお，参考までに陰的列挙法を用いた場合の実験結果もあわせて示している．

7　おわりに

本稿では，情報処理の分野で基本的な問題の 1 つである SAT に対する定量的アプローチと記号的アプローチの比較として，改訂陰的列挙法とホーン緩和戦略の比較を行った．なお，改訂陰的列挙法およびホーン緩和戦略の詳細，ならびに実験結果の考察は当日発表する．

参考文献

[1] Hooker,J.N.: A Quantitative Approach to Logical Inference, Decision Support Systems, Vol.4, pp.45-69(1988)

[2] Gallo,G. and Urbani,G: Algorithm for Testing Satisfiability of Propositional Formulae, J. Logic Programming, Vol.7, pp45-61(1989)

[3] Hooker,J.N.: Resolution vs. Cutting Plane Solution of Inference Problems: Some Computational Experience, Operations Research Letters, Vol.7, No.1, pp1-7(1988)

[4] 今野浩:整数計画法, 産業図書 (1981)

[5] 大柳, 大内: 命題論理充足可能性問題に対する定量的アプローチ, 平成4年度日本ＯＲ学会秋期研究発表会アブストラクト集 (1992)

[6] Dowling,W.F. and Gallier,J.H: Linear-Time Algorithm for Testing the Satisfiability of Propositional Horn Formulae, J. Logic Programming, Vol.3, pp267-284(1984)

表1　数値実験結果 (単位(s))

(1)変数＝３０

節　数	T/F	陰的列挙法	改訂陰的列挙法	ホーン緩和戦略
５０	T	0.040	0.003	0.026
１００	T	0.264	0.030	0.086
１５０	F	1.100	0.110	0.406
２００	F	0.814	0.060	0.248
２５０	F	0.680	0.047	0.250

(2)変数＝５０

節　数	T/F	陰的列挙法	改訂陰的列挙法	ホーン緩和戦略
１００	T	0.180	0.010	0.044
１５０	T	0.503	0.050	0.108
２００	T	1.573	0.153	2.004
２５０	T=1	8.643	0.583	2.664

(3)変数＝７０

節　数	T/F	陰的列挙法	改訂陰的列挙法	ホーン緩和戦略
１５０	T	1.020	0.250	0.078
２００	T	4.546	0.642	0.132
２５０	T	9.797	0.937	3.196
３００	T=2	－	28.576	68.536